

Chapitre I

Généralités sur les vibrations

I-1 Qu'est ce qu'un mouvement vibratoire

*Un mouvement vibratoire, ou oscillatoire, est un mouvement qui se répète dans l'espace et autour d'une position d'équilibre.
Les objets soumis à un mouvement oscillatoire sont appelés oscillateurs.*

Caractéristiques d'un mouvement oscillatoire :

*Le mouvement est périodique. Il se répète à intervalle de temps (**T**) fixe. **T** est dite période.*

***T** est la durée nécessaire pour un cycle complet d'oscillation (un aller-retour). Son unité est la seconde (**s**).*

*La fréquence **ν** est le nombre de répétitions du mouvement par unité de temps. Son unité est (**s^{-1}**) ou hertz (**Hz**).*

$$**T = 1/\nu**$$

Quelques exemples de mouvements périodiques :

Rotation de la terre autour du soleil

La période T du mouvement est égale à une année sidérale (période orbitale de la Terre autour du Soleil, dans le repère de Copernic). $T = 3,15 \cdot 10^7$ s, soit une fréquence $\nu = 3.17 \cdot 10^{-8}$ Hz.

Oscillation d'un pendule simple de longueur 1m

Avec $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $T = 2.007$ s et donc $\nu = 0.498$ Hz.

Vibrations sonores

T varie entre 0.005 s et $6.6 \cdot 10^{-5}$ s par conséquent ν varie de 20 Hz à 15 kHz.

Courant électrique fourni par les centrales

$T = 0.016$ s donc $\nu = 60$ Hz (en Amérique du nord) $T = 0,02$ s $\nu = 50$ Hz (ailleurs)

Pendule

Pour que le mouvement soit considéré comme oscillatoire, L'angle doit être petit ($\theta(t) \leq 10^\circ$) pour pouvoir appliquer l'approximation $\sin\theta \approx \text{tg}\theta \approx \theta$.

Nous allons nous intéresser aux vibrations mécaniques et électriques. Quelques exemples de systèmes oscillants: masse attachée à un ressort, pendule simple, circuit LC ... etc seront abordés.

I -2 Notion de degré de liberté

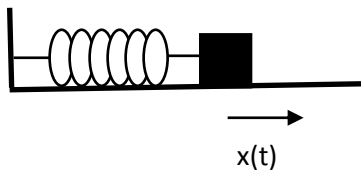
Pour étudier un système oscillant, il faut connaître le nombre de variables indépendantes qui régissent le mouvement.

Dans un système oscillant, le nombre de degrés de liberté est le nombre de variables indépendantes, appelées aussi coordonnées généralisées, nécessaires et suffisantes pour décrire l'évolution du système.

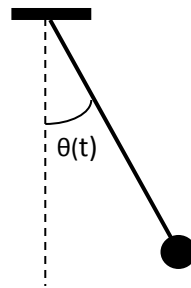
Le nombre de degrés de liberté correspond au nombre d'équations différentielles indépendantes régissant l'évolution du système.

Exemples de systèmes à 1 degré de liberté

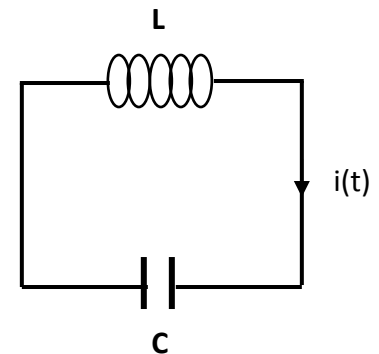
Dans les systèmes suivants, le phénomène peut être décrit à l'aide d'une seule variable.



Élongation $x(t)$ pour la masse attachée à l'extrémité du ressort.



l'angle $\theta(t)$ pour le pendule simple.



Charge $q(t)$ ou courant $i(t)$ circulant dans le circuit LC.

I -3 Représentation de Fresnel

Le modèle de mouvement, considéré dans ce paragraphe, permet de comprendre les caractéristiques d'un phénomène d'oscillations harmoniques.

Ce dernier est important, car Il explique plusieurs problèmes: En physique classique et en physique quantique (avec une précision approchée).

*Considérons un point **M** en mouvement circulaire,
sur un cercle de rayon **A**.*

*Le mouvement **M** de se fait avec une vitesse angulaire ω constante.*

*Soit le point **N**, la projection du point **M** sur l'axe $x'x$ passant par le centre **O** du cercle.*

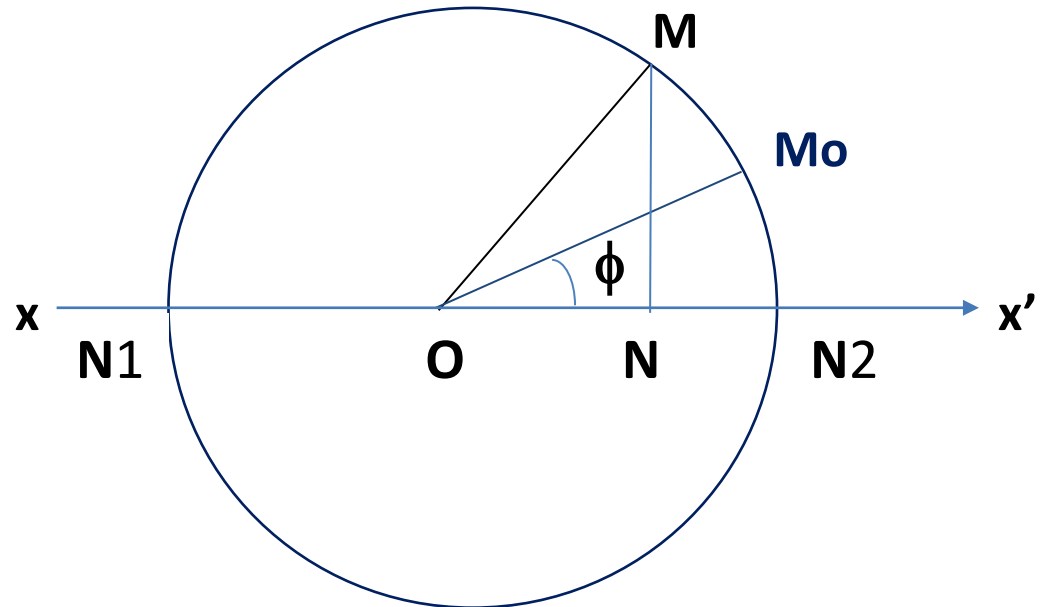
Voir le schéma suivant

Représentation de Fresnel

Le point **N** est la projection du point matériel **M** sur l'axe xx' .

Le déplacement de **M** sur le cercle, avec une vitesse ω , correspond à un mouvement vibratoire harmonique du point **N**, entre les positions **N1** et **N2**.

N représente l'oscillateur harmonique.



Pour décrire le mouvement harmonique du point **N**, il faut connaître sa position en fonction du temps $x(t)$.

Si à l'instant initial ($t = 0 \text{ s}$) le rayon $\mathbf{OMo}$ fait un angle φ avec l'axe $x'x$.
 $\varphi = (x'x, OMo)$

A l'instant t , l'angle φ augmente d'une quantité ωt pour devenir ($\varphi + \omega t$).

Selon le schéma précédent, dit représentation de Fresnel, on peut écrire :
 $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

L'expression $x(t)$ est celle d'un oscillateur harmonique. Elle représente le mouvement harmonique de N sur le segment N_1N_2 .

A est une constante positive dite amplitude du mouvement. C'est la position extrême du point N par rapport à sa position d'équilibre.

ω : pulsation ou fréquence angulaire, en radian par seconde (rd/s).

T : période du mouvement. Temps d'une oscillation complète. Le point matériel revient à sa position initiale.

$$x(t) = x(t + T) \text{ donc } A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega(t + T) + \varphi)$$

En en déduit : $\omega T = 2 \pi$

L'expression de la période est donc : $T = 2 \pi / \omega$

La fréquence ν , qui représente le nombre de tours par unité de temps, est :

$$\nu = 1 / T = \omega / 2 \pi$$

La phase du mouvement à l'instant t , qui se mesure en radians, est : $(\omega t + \varphi)$.

φ est la phase initiale ou constante de phase du mouvement , à $t = 0s$.

La vitesse $V(t)$ du mouvement du point N se calcule par dérivation de l'expression
 $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.

$$V(t) = dx(t)/dt = -A \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

L'accélération $a(t)$ du mouvement du point N s'obtient
par dérivation de la vitesse $V(t)$.

$$a(t) = dV(t)/dt = d^2x(t)/dt^2 = -A \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{Donc : } a = -\omega^2 x \quad \text{et} \quad a + \omega^2 x = 0$$

I-4 Méthodes pour l'étude d'un système vibratoire

1 - Méthode de la loi de Newton

A l'équilibre

Pour un mouvement de **translation**,
la somme des forces extérieures est nulle :



$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

Pour un mouvement de **rotation**,
la somme des moments des forces appliquées,
par rapport l'axe de rotation Δ est nulle :



$$\sum M_{\Delta} = 0$$

En mouvement :

Pour un mouvement de **translation**,
la somme des forces extérieures est égale
au produit de la masse et de l'accélération :



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\ddot{x}\vec{i}$$

Pour un mouvement de **rotation**,
la somme des moments des forces appliquées,
par rapport l'axe de rotation Δ est égale
au produit du moment d'inertie du corps et de
l'accélération angulaire :



$$\sum M_{\Delta} = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

Le moment $\mathbf{M}$ d'une force $\mathbf{F}$ appliquée en un point $\mathbf{A}$, par rapport à un point $\mathbf{O}$ est le produit vectoriel :

$$\vec{M} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

Le moment d'une force $\mathbf{F}$ par rapport à un axe orienté Δ est une grandeur scalaire :

$$M_{F/\Delta} = \vec{u} \cdot \vec{M}$$

Théorème d'Huygens :

Pour un corps en rotation, par rapport à un point situé à une distance d du centre de gravité du corps, le moment d'inertie $\mathbf{J}$ est :

$$J = J_0 + md^2$$

J_0 est le moment d'inertie intrinsèque (par rapport au centre de gravité du corps considéré). d est la distance entre le centre de gravité du corps et l'axe de rotation Δ .

Barre ou une tige
de longueur l

$$J_0 = \frac{1}{12} ml^2$$

Disque de rayon
 R

$$J_0 = \frac{1}{2} mR^2$$

Sphère pleine de rayon
 R

$$J_0 = \frac{2}{5} mR^2$$

2 - Méthode des énergies

Si la somme des forces extérieures appliquées à un objet est nulle, le système est dit isolé.

Son énergie totale (**ET**) est alors constante (conservée).

La dérivée de l'énergie totale, par rapport au temps est nulle. $dE_T/dt = 0$.

$$E_T = E_C + E_P \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_C}{dt} = - \frac{dE_P}{dt}$$

3 - Méthode de Lagrange

Le lagrangien (**L**) d'un système en mouvement une grandeur équivalente

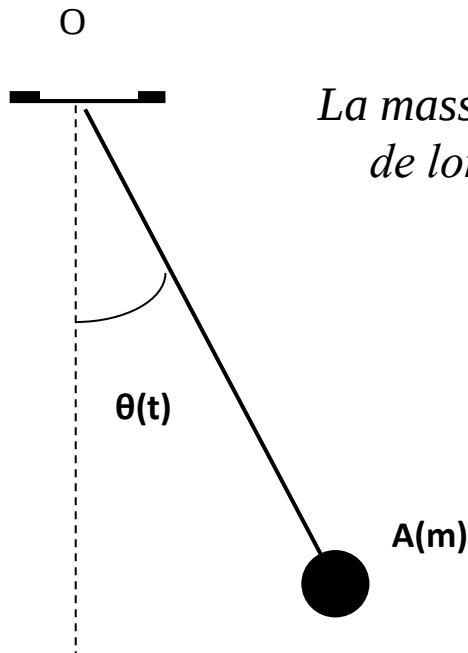
à une énergie. C'est l'énergie cinétique moins l'énergie potentielle : $L = E_C - E_P$

L'équation de Lagrange s'écrit : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

qi est dite variable généralisée. Généralement, les oscillations étudiées sont de faibles amplitudes. L'énergie potentielle est alors fonction de la variable q_i . L'énergie cinétique est fonction de la dérivée de **qi** de par rapport au temps.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial E_P}{\partial q_i} = 0$$

Application : Le pendule simple



La masse ponctuelle m , au point est suspendue au point O , par un fil de longueur l . Pour des angles θ inférieurs à 10 degrés (faibles oscillations), le moment du poids de (m) est

$$M_{\vec{mg}} / \Delta = -mgl \sin \theta = -mgl \theta$$

La loi de Newton donne:

$$-mgl \theta = ml^2 \ddot{\theta} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

La solution de l'équation différentielle est une fonction périodique.