

Chapitre II

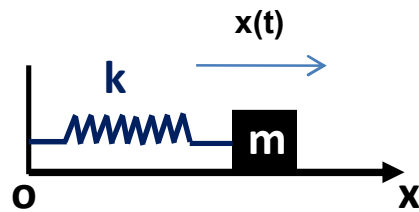
Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

L'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique est un modèle dans plusieurs problèmes de physique classique ou quantique. Il correspond à des oscillations de faible amplitude.

II - 1 Oscillations harmoniques longitudinales: Masse liée à l'extrémité d'un ressort

*Le système considéré est une masse m liée à l'extrémité d'un ressort de raideur k . L'autre extrémité du ressort est fixe. La masse m est en mouvement, **sans frottement**, sur un axe ox .*



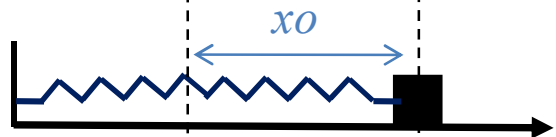
*Si on allonge ou on comprime le ressort d'une quantité x , la masse m sera soumise à une **force de rappel** qui tend à la ramener vers sa position d'équilibre stable.*

Si l'élongation x est **faible**, la force est proportionnelle à x . La constante de proportionnalité, dite constante de raideur du ressort, est k .

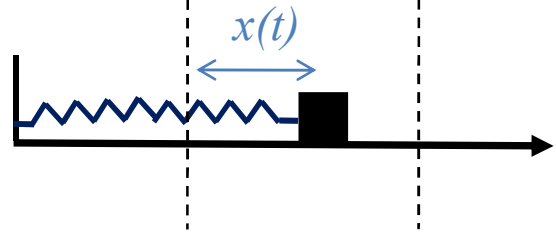
La force de rappel causée par le ressort allongé ou comprimé est : $F = -k.x$
Le signe (-) indique que F est orientée dans le sens contraire à celui de l'axe Ox .



Système à l'équilibre : pas de mouvement.



Système à $t = 0$ s : On tire la masse d'une quantité x_0 .
On abandonne la masse. Commencement du mouvement.



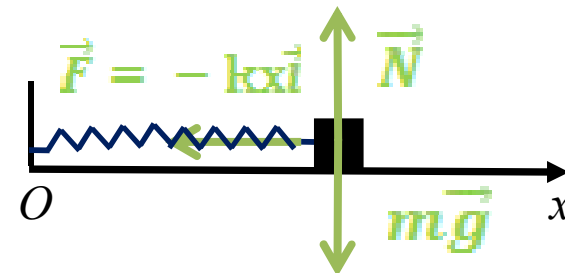
Système à $t \neq 0$ s : La masse est à une position $x(t)$, par rapport à sa position d'équilibre.

La masse est abandonnée sans vitesse initiale. Les conditions initiales du mouvement sont :

$$\text{à } t = 0 : x(0s) = x_0 (m) , V(0s) = \dot{x}(0) = 0 (m/s)$$

Les forces appliquées à la masse m sont :

Le poids $P = mg$, la réaction du plan N et la force de rappel F . Les forces de frottements sont négligées et $mg = N$.



Selon la deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
 $\vec{a}$ est l'accélération du mouvement.



La projection des forces sur Ox donne :

$$-kx = m\ddot{x} \longrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (*)$$

Dans l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, du second ordre (*), $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
 ω_0 est appelée pulsation ou fréquence angulaire.

Dans l'équation (*) $\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$ est proportionnelle à x. La solution est de la forme :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

La période T_0 du mouvement de (m) est :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

La fréquence ν_0 du mouvement de (m) est :

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La vitesse du mouvement de (m) est :

$$\dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t$$

L'accélération du mouvement de (m) est :

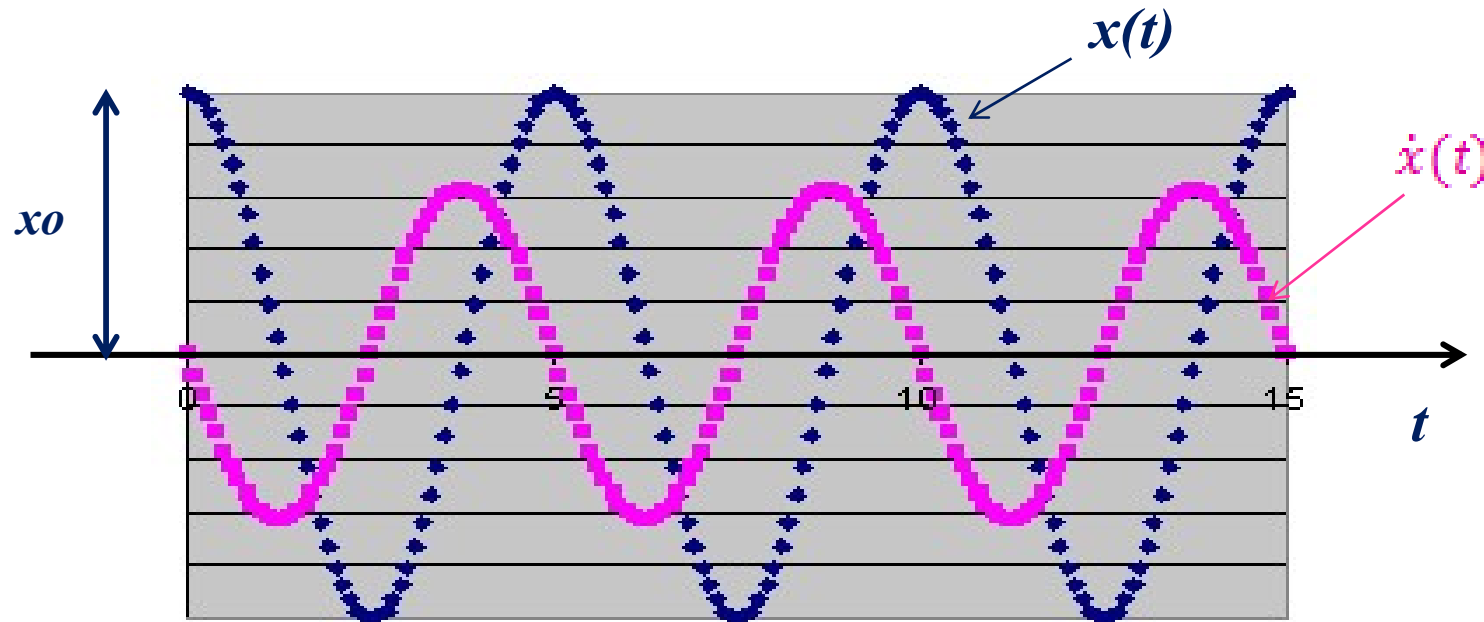
$$\ddot{x}(t) = -x_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t$$

Les constantes A et ϕ sont déterminées en utilisant les conditions initiales précédentes :

$$\text{à } t = 0 : x(0s) = x_0 (m) , V(0s) = \dot{x}(0) = 0 (m/s)$$

$$\begin{array}{lcl} x(0) = x_0 = A \cos \phi & \longrightarrow & \phi = 0 \longrightarrow x(t) = A \cos(\omega_0 t) \\ \dot{x}(0) = 0 = -A \sin \phi & \longrightarrow & \phi = \pi \longrightarrow x(t) = -A \cos(\omega_0 t + \pi) \end{array}$$

Représentation des variations de la position $x(t)$ et de la vitesse $\dot{x}(t)$ pour un mouvement oscillatoire, de période égale à 5 secondes et d'amplitude 5 unités SI (m, cm, mm, ou autre)



*À l'instant initial ($t = 0$ s), la masse (m) se trouve à une position $x_0 > 0$.
Lorsqu'on abandonne la masse (m), la force de rappel tend à ramener (m)
vers sa position d'équilibre stable.
À cette position la valeur de la vitesse est maximale.*

Il -2 Autres solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique

On peut également donner la solution $x(t)$ de l'équation différentielle () sous les formes suivantes :*

-1- $x_1(t) = \sin(\omega_0 t)$ est solution de l'équation (*)
puisque $\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 \sin \omega_0 t = -\omega_0^2 x$

-2- $x_2(t) = \cos(\omega_0 t)$ est solution de l'équation (*)
 puisque $\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 x$

-3- La combinaison linéaire des 2 solutions x_1 et x_2 est aussi solution de l'équation (*)

$$x(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$$

C_1 et C_2 sont des constantes qu'on peut déterminer grâce aux conditions initiales.

II -3 Énergie totale d'un oscillateur harmonique

L'énergie d'un oscillateur harmonique comporte une énergie cinétique E_c et une énergie potentielle E_p .

L'énergie totale E_T est la somme : $E_T = E_c + E_p$, en Joules

Energie cinétique : En considérant la solution $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$, l'énergie cinétique E_c

de l'oscillateur considéré (ressort + masse m) s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \longrightarrow \quad E_c = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

Energie potentielle : La force de rappel $\vec{F} = -kx\vec{i}$ est conservative, c'est-à-dire qu'elle dérive d'un

potentiel $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$. A une dimension F et l'énergie potentielle sont:

$$F = -kx = -\frac{dE_p}{dx} \quad \longrightarrow \quad E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

En considérant la solution $x(t)$ précédente : $E_p = \frac{1}{2} kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$

Energie totale : Si on choisit le point O qui correspond à la position d'équilibre stable comme

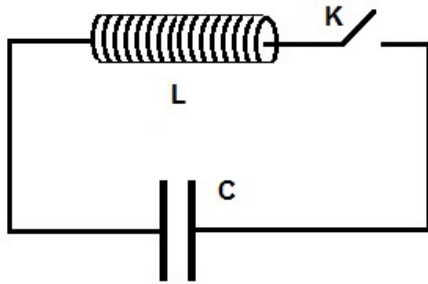
origine des énergies potentielles: $E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2} kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$

Puisque $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, l'énergie totale de l'oscillateur est constante : $E_T = \frac{1}{2} kx_0^2$

On remarque qu'à la position $x = 0$, E_p est nulle, l'énergie totale est purement cinétique.

Aux extrémités x_0 et $-x_0$ E_c est nulle car la vitesse est nulle ; l'énergie totale est purement potentielle.

II -4- Circuit électrique LC



On considère un circuit électrique comprenant un condensateur plan de capacité C et une bobine L . L'équilibre stable correspond un circuit ouvert et un condensateur non chargé. On charge le condensateur avec une charge initiale q_0 .

A l'instant initial $t = 0$, $q = q_0 \neq 0$. $\left. \frac{dq_0}{dt} \right)_{t=0} = i_0 = 0$

On ferme l'interrupteur (K). A l'instant $t \neq 0$, la charge du condensateur est $q(t)$. Le courant électrique dans le circuit est $i(t)$. La tension aux bornes de C est $V_C = q/C$, celle aux bornes de L est $V_L = L \, di/dt$.

L'équation qui régit le circuit est : $L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ or $i = \frac{dq}{dt}$ on obtient $\ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0$

En posant $\omega_0^2 = 1/LC$, on retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur libre :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Equation différentielle dont la solution, en termes de charge électrique, peut s'écrire sous la forme :

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Le courant électrique $i(t)$ s'écrit : $i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_0 \cdot \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = q_0 \cdot \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$

Le courant est en quadrature de phase avec la charge q .