

Chapitre III

Oscillateur harmonique amorti

*Nous venons d'étudier un mouvement vibratoire libre.
La seule force appliquée au système oscillant est la force de rappel.
Les oscillations libres du système vont se répéter périodiquement,
jusqu'à l'infini.*

*En réalité, il existe toujours des forces de frottements qui,
dans certains cas, peuvent être négligées.*

*Dans le temps, ces forces ont pour effet d'amortir les oscillations;
jusqu'à l'arrêt (équilibre stable de l'oscillateur).*

Exemples de forces:

Résistance de l'air, forces de frottement d'un liquide visqueux ...

III - 1 Oscillations d'une masse liée à un ressort

Soit une masse m liée à l'extrémité d'un ressort de raideur k .

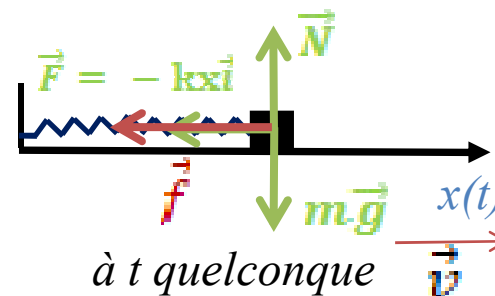
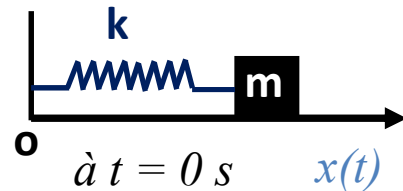
m vibre sur un axe horizontal Ox .

m est soumise à la force de rappel $\vec{F} = -kx\vec{i}$

Si on suppose que m est aussi soumise à une force de frottement $\vec{f}$.

Dans le cas où un objet est soumis à de petites vitesses, l'expérience montre que la force de frottement est proportionnelle à la vitesse et est de sens contraire à celle-ci: $\vec{f} = -\Gamma\vec{v}$

Γ est la constante ou coefficient de frottement. Le signe $(-)$ signifie que la force de frottement s'oppose au mouvement.



En appliquant la loi de Newton

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ *La projection de ces forces sur l'axe Ox donne :*

$$-kx - \Gamma \dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\Gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Équation différentielle, du second degré, pour l'oscillateur harmonique amorti.

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_0 : \Rightarrow \text{La pulsation propre de l'oscillateur harmonique libre, c'est-à-dire en absence des forces de frottement.}$$
$$\lambda = \frac{\Gamma}{2m} \quad \lambda \Rightarrow \text{Le coefficient d'amortissement, en } s^{-1}.$$

Pour trouver les solutions de l'équation différentielle, on détermine, dans un premier temps, son équation caractéristique en posant : $x = \alpha^0$, $\dot{x} = \alpha^1$, $\ddot{x} = \alpha^2$

L'équation caractéristique est : $\alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega_0^2 = 0$ ()*

les solutions de l'équation différentielle dépendent du signe du discriminant Δ de l'équation ().*

Il y a 3 cas à considérer : $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ avec : $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$

III-2 Solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur amorti

Les solutions de l'équation différentielle $\Rightarrow \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
dépendent du signe du discriminant $\Rightarrow \Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$

A – Premier cas : $\Delta > 0$: Sur-amortissement (Le mouvement est fortement amorti)
Deux solutions réelles pour l'équation caractéristique (*) :

$$\alpha_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \text{On posera } \sigma = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Donc : Deux solutions réelles pour l'équation différentielle de l'oscillateur :

$$x_1(t) = e^{\alpha_1 t} = e^{-\lambda t + \sigma t} \quad \text{et} \quad x_2(t) = e^{\alpha_2 t} = e^{-\lambda t - \sigma t}$$

Une combinaison linéaire des 2 solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est aussi une solution :

$$x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 e^{\sigma t} + C_2 e^{-\sigma t})$$

La vitesse s'écrit alors : $\dot{x}(t) = e^{-\lambda t} (C_1(\sigma - \lambda) e^{\sigma t} - C_2(\sigma + \lambda) e^{-\sigma t})$

Les conditions initiales permettent de trouver les constantes C_1 et C_2 :

$$x(t=0) = C_1 + C_2 \quad \text{et} \quad \dot{x}(t=0) = C_1(\sigma - \lambda) - C_2(\sigma + \lambda)$$

Cas particulier : On écarte la masse de sa position d'équilibre d'une longueur x_0 puis on l'abandonne:

$$x(t=0) = x_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{x_0}{2\sigma} e^{-\lambda t} [(\sigma + \lambda) e^{\sigma t} + (\sigma - \lambda) e^{-\sigma t}]$$

La masse revient à sa position d'équilibre sans oscillations. Sur-amortissement. Mouvement apériodique.

B – Deuxième cas : $\Delta = 0$: Amortissement critique

$$\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) = 0 \implies \lambda = \omega_0$$

Dans ce cas l'équation caractéristique $\alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega_0^2 = 0$ admet une solution réelle ou particulière double : $\alpha_1 = \alpha_2 = -\lambda$

L'équation différentielle de l'oscillateur $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ admet comme solution :

$$x(t) = g(t) \cdot e^{-\lambda t}$$

La vitesse est : $\dot{x}(t) = (-\lambda g + \dot{g}) e^{-\lambda t}$ L'accélération : $\ddot{x}(t) = (\lambda^2 g - 2\lambda \dot{g} + \ddot{g}) e^{-\lambda t}$

En remplaçant $x, \dot{x}$ et $\ddot{x}$ dans l'équation différentielle, on trouve : $\ddot{g} + (\omega_0^2 - \lambda^2)g = 0$

Puisque $\lambda = \omega_0 \implies \ddot{g}(t) = 0 \implies g(t) = C_1 + C_2 t \implies$ La solution générale est :
 $x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\lambda t}$

$x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ alors $C_1 = x_0$ et $C_2 = x_0 \lambda \implies x(t) = x_0(1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$

Le mouvement est apériodique. En comparaison avec le sur-amortissement, l'objet oscillant revient à sa position d'équilibre stable de façon plus rapide.

Comme applications:

Aiguille d'un galvanomètre, suspension d'une voiture qui est due aux amortisseurs ...

C– Troisième cas : $\Delta < 0$: Amortissement faible

$\Delta = 4 (\lambda^2 - \omega_o^2) < 0$ -- On peut écrire : $\Delta = j^2 4 \omega^2$ -- avec $j^2 = -1$ et $\omega^2 = (\omega_o^2 - \lambda^2)$

L'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées : $\alpha_1 = -\lambda + j\omega$ et $\alpha_2 = -\lambda - j\omega$

L'équation différentielle de l'oscillateur caractéristique admet comme solution une combinaison linéaire de : $e^{\alpha_1 t}$ et $e^{\alpha_2 t}$

$$x(t) = C_1 e^{(-\lambda + j\omega)t} + C_2 e^{(-\lambda - j\omega)t} \quad \text{Ou bien} \quad x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 e^{+j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t})$$

Puisque $e^{+j\omega t} = \cos\omega t + j \sin\omega t$ et $e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j \sin\omega t$

$$x(t) = e^{-\lambda t} [(C_1 + C_2) \cos\omega t + j(C_1 - C_2) \sin\omega t]$$

$x(t)$ étant un nombre réel, C_1 et C_2 doivent être des complexes conjugués: $C_1 + C_2$ et $j (C_1 - C_2)$ seront réels.

$x(t)$ peut alors s'écrire sous la forme: $x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$ Avec : $A = \frac{C_1 + C_2}{\cos \varphi}$ et $\tan \varphi = \frac{-j (C_1 - C_2)}{C_1 + C_2}$

Le mouvement oscillatoire amorti est pseudo-harmonique. La solution est sinusoïdale avec une amplitude décroissante.

$$\text{La vitesse s'écrit: } \dot{x}(t) = -A e^{-\lambda t} [\lambda \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi)]$$

Les constantes A et φ sont déduites à l'aides des conditions initiales

Selon les valeurs du coefficient d'amortissement, la solution $x(t)$ prend l'une des 3 allures suivantes.

