

Chapitre I : ELEMENTS D'ANALYSE COMBINATOIRE

1.1 Principe Fondamental de l'Analyse Combinatoire

Si une procédure quelconque peut être représentée de n_1 façons différentes, si après cette procédure une seconde procédure peut être représentée de n_2 façons, si après cette procédure une troisième procédure peut être représentée de n_3 façons et ainsi de suite Une k ième procédure peut être représentée de n_k façons alors le nombre total de façons différentes qui permettront d'exécuter les procédures dans l'ordre indiqué est égale au produit $n_1.n_2.n_3...n_k$.

Exemple 1 : Une plaque d'immatriculation comprend 4 chiffres dont le premier est différent de zéro suivi de 2 lettres distinctes et différentes de I et de O. Déterminer le nombre de plaques d'immatriculation possibles.

On remarque que le premier chiffre est choisi dans l'ensemble 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Il peut donc prendre 9 chiffres différents. Les, second troisième et quatrième chiffre prennent leurs valeurs dans 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 9. La cinquième case prend une lettre parmi 24 lettres différentes, la dernière case prend ses lettres parmi les 26 - 2 = 24 lettres de l'alphabet.

Chiffre 1	Chiffre 2	Chiffre 3	Chiffre 4	1er lettre	2 éme lettre
-----------	-----------	-----------	-----------	------------	--------------

Le nombre de plaques d'immatriculation différentes est par conséquent

$$n = 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 24 \times 23$$

1.2 Les arrangements sans répétition

Le nombre factoriel

Le produit des entiers naturels de 1 à n apparaît souvent en mathématiques. On le note $n!$ et on dit factoriel n :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

Par convention : $0! = 1$

Propriété : $n! = (n-1)! \times n$

Définition

On appelle arrangement de n éléments p à p tout ensemble ordonné de p de ces éléments tous distincts.

Exemple : Soit l'ensemble des 3 lettres suivantes (a, b, c). Le groupement ab, ac, bc, ba, ca, cb constitue des arrangements des lettres a,b,c deux à deux. Le groupement abc, acb, bca, bac, cab, cba constitue des arrangements 3 à 3.

On notera par A_n^p le nombre d'arrangements de n éléments p à p tous distincts. Dans l'exemple :

$$A_3^2 = 6, A_3^3 = 6$$

Méthode de calcul

Considérons un arrangement quelconque de n éléments p à p , il se note $i_1 i_2 i_3 \dots i_p$.

Pour choisir i_1 il y'a n possibilités, pour choisir i_2 il y'a $n-1$ possibilités ;

Pour choisir i_3 il y'a $n-2$ possibilités, car il doit être différent de i_1 et de i_2 et ainsi de suite, pour choisir i_p , il y'a $n-p+1$ possibilités donc d'après le principe d'analyse combinatoire :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$$

En utilisant la notation factorielle

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

1.3 Les arrangements avec répétition

Il arrive que l'on veuille connaître le nombre de permutations d'un ensemble dont les éléments ne soient pas distincts. Soit par exemple un ensemble de n éléments, parmi lesquels p_1 sont semblables entre eux p_2 sont semblables entre eux, p_k sont semblables entre eux le nombre de permutations de ces éléments avec répétition est :

$$\frac{n!}{p_1! p_2! p_3! \dots p_k!}$$

Exemple : supposons que nous voulons former tous les mots en 5 lettres en utilisant les lettres du mot DADDY on sait qu'il y a $5! = 120$ permutations des lettres D1AD2D3Y mais lettres D1,D2,D3 sont semblables et les six permutations suivantes constituent le même mot : D1D2D3AY, D2D1D3AY, D3D1D2AY le nombre de mots différents utilisant les lettres du mots DADDY est :

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

1.4 Echantillon Exhaustif et Non Exhaustif

Soit une population de n éléments, on appelle un échantillon de taille p extrait de cette population, toute suite ordonnée de p éléments de la population.

Supposons que l'échantillon contient plusieurs fois le même élément ce qui sera le cas lorsque nous remettrons l'élément tiré dans la population après chaque tirage. On dira que le tirage est non exhaustif.

Proposition

Il y'a n^p échantillons non exhaustifs de taille p .

En effet : Etant donné que nous remettons à chaque fois l'élément tiré, à chaque tirage il y'a n possibilités de choisir un élément et comme on en fait p fois, d'après le principe fondamental de l'analyse combinatoire le nombre d'échantillons non exhaustifs est égal à n^p .

Contrairement à l'hypothèse précédente, supposons que l'échantillon ne peut contenir qu'une fois au plus tout élément de la population, c'est le cas si nous ne remettons dans la population, c'est le cas si nous ne remettons dans la population les éléments tirés, on dit alors que l'échantillon est exhaustif.

Exemple

De combien de façons une personne peut elle choisir 3 cartes d'un jeu de 52 cartes (bridge)

1. Avec remise
2. Sans remise

Solution

- Avec remise veut dire qu'il s'agit d'un échantillon non exhaustif : il y'a donc $52 \times 52 \times 52 = 52^3 = 140608$
- Sans remise veut dire qu'il s'agit d'un échantillon exhaustif : il y'a donc $52 \times 51 \times 50 = 132600$

1.5 Coefficients binomiaux et formule de Binôme

Nous connaissons la notation

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Et la notation anglosaxone

$$\binom{n}{p}$$

Exemple : $\binom{8}{2} = \frac{8.7}{1.2} = 28$

Formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p \\ &= a^n + na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} + \dots + C_n^n a^0 b^n \end{aligned}$$

Exemple :

$$(a+b)^5 = 5a^4b + \frac{5.4}{1.2}a^3b^2 + \frac{5.4}{1.2}a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Propriétés

1. Le développement de Newton contient (N+1) termes
2. le degré de a et de b dans le développement est n
3. le degré de a décroît de n à 0, alors que degré de b augmente de 0 à n
4. Le coefficient de chaque terme est $\binom{n}{p}$ ou p est le degré de a ou de b
5. les coefficients de part et d'autres du développement sont égaux, de plus nous pouvons ordonner ces coefficients sous forme de triangle appelé triangle de PASCAL

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^2b^4 + b^5$$

[illegible]

Application

Développer : $(1+x)^6$

$$(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

Le premier et le dernier terme de chaque ligne est 1. De plus, et en raison de l'identité remarquable

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$$

Tout nombre est égal à la somme des nombres situés au dessus de lui.

Exemple : $4=3+1$

1.6 Les combinaisons

On appelle combinaison de n éléments pris p à p un sous ensemble quelconque de p éléments d'un ensemble de n éléments, *l'ordre n'a pas d'importance*. Toute combinaison de p éléments engendre $p!$ permutation, donc le nombre de combinaison de p éléments pris dans un ensemble à n éléments est tel que :

$$A_n^p = p! C_n^p$$

$$\text{Donc } C_n^p = \frac{A_n^p}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

Exemple :

Les combinaisons de 3 lettres parmi a,b,c,d

Les arrangements	Les combinaisons
abc, acd, bac, bca, cab, cba	abc
abd, adb, bad, bda, dab, dba	abd
acd, adc, cad, cda, dac, dca	acd
bcd, bdc, cdb, cbd, dbc, dcb	bcd

On veut former 56 comités de 3 personnes l'aide de 8 personnes le nombre de comités est égale à :

$$C_3^8 = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

1.7 Coefficients multinomiaux

Soit un ensemble à n éléments distincts. On veut le diviser en r groupes distincts de tailles respectives $n_1, n_2, \dots, n_r$ avec $\sum_{i=1}^r n_i = n$. Combien de divisions possibles peut-on avoir ?

Pour le premier groupe, nous avons $C_n^{n_1}$ possibilités de choix, pour le deuxième groupe $C_{n-n_1}^{n_2}$, pour la troisième groupe $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ possibilités et ainsi de suite. Pour le r^{ième} groupe $C_{n-n_1-\dots-n_{r-1}}^{n_r}$ possibilités. Le nombre total de divisions possibles et en appliquant le principe fondamental de dénombrement est égale à :

$$C_n^{n_1} \times C_{n-n_1}^{n_2} \times C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \dots \times C_{n-n_1-\dots-n_{r-1}}^{n_r}$$

Ce nombre est égale à :

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \times \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \times \dots \times \frac{(n-n_1-\dots-n_{r-1})!}{n_r!(n-n_1-\dots-n_r)!}$$

En simplifiant, il est égale à :

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$$

Soit r nombres $n_1, \dots, n_r$ tels que $n_1+n_2+\dots+n_r=n$, le terme $\binom{n}{n_1, \dots, n_r}$ défini par $\frac{n!}{n_1!\dots n_r!}$, est appelé coefficient multinomial il représente le nombre de partitions possibles de n objets en r groupes distincts de tailles respectives $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$.

Exemple

Un homme veut offrir un total de 7 cadeaux à ses 3 enfants, l'aîné en recevra 3 et les autres 2. de combien de manières peut-il procéder ? il peut procéder de

$$\frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

Exercice d'application

- 1) Dans un lot de 20 pièces fabriquées, on en prélève simultanément quatre, combien de prélèvements différents peut-on ainsi obtenir ?
- 2) On suppose alors que, sur les vingt pièces, quatre sont mauvaises.
Quel est le nombre de prélèvements ou :
 1. les quatre pièces sont bonnes ?
 2. au moins une pièce est mauvaise ?
 3. une pièce et une seule est mauvaise ?
 4. deux pièces au moins sont mauvaises ?

Solution

- 1) il y a $C_{20}^4 = 4845$ prélèvements possibles.
- 2) a) le nombre de prélèvements possibles de quatre pièces parmi seize est : $C_{16}^4 = 1820$
 b) Le nombre de prélèvements avec au moins une mauvaise pièce est la différence entre le nombre de prélèvements avec quatre bonnes pièces, soit, d'après 1° et 2° a),
 $C_{20}^4 - C_{16}^4 = 3025$
 c) il y a quatre choix possibles pour la mauvaise pièce. Pour chaque choix d'une mauvaise, il y a $C_{16}^3 = 560$ choix possibles des trois bonnes pièces.
 Il y a donc $4 \times 560 = 2240$ prélèvements avec une pièce et une seule mauvaise.
 d) on utilise les résultats précédents en remarquant qu'on peut obtenir le nombre de prélèvements avec au moins deux mauvaises pièces en retranchant du nombre de prélèvements avec au moins une mauvaise pièce le nombre de prélèvements avec une mauvaise pièce, soit :

$$3025 - 2240 = 785$$