

Chapitre II- Notion de probabilités

2.1 Introduction

La probabilité est l'étude d'expériences aléatoires. Si on jette un dé il est sur qu'il tombe par terre mais il n'est pas sur que le chiffre 6 apparaisse sur la face supérieure. Si on refait l'expérience plusieurs fois c'est à dire si on jette plusieurs fois le dé et si s est le nombre de fois qu'on obtienne le chiffre 6 et n le nombre de jets, on a remarqué que la production $f = \frac{s}{n}$ qui est la fréquence absolue devient constante quand n devrait grand. En calcul des probabilités nous définissons un modèle mathématique pour l'expérience précédente, en précisant les probabilités. Il est naturel de vérifier la validité du modèle probabiliste donné et des fréquences absolues effectives, ceci se fait à l'aide de tests statistiques.

2.2 Notion de probabilité sur un ensemble fini

Lorsque nous lançons une pièce de monnaie, le jet peut faire apparaître soit PILE ou FACE. L'ensemble des éventualités possibles c'est-à-dire des résultats possibles appelé ensemble fondamentale est constitué de 2 éléments en général on le note Ω , ici $\Omega = \{PILE, FACE\}$. Si on suppose que la pièce est symétrique il n'y a pas de raison que PILE ait plus de chance d'apparaître que FACE. On dit que les 2 éventualités :

Apparition du résultat PILE

Apparition du résultat FACE

Sont équiprobables et on attribue à chacune des éventualités la probabilité $\frac{1}{2}$

De façon plus générale, étant donné un ensemble fondamental Ω comportant un nombre fini d'éléments supposés équiprobables on attribuera la probabilité $\frac{1}{n}$ à chaque éventualité (ou élément du résultat)

Vocabulaire des événements

Dans une **expérience aléatoire**, l'**univers** Ω est l'ensemble des résultats possibles.

Un **événement** est une partie de l'univers

Un **événement élémentaire** est un événement possédant un seul élément.

Des événements A, B sont **disjoints**, ou **incompatibles**, si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$

L'événement contraire d'un événement A est l'ensemble $\bar{A}$ des éléments de Ω n'appartenant pas à A .

Exemple : Dans le cas de lancer de dé, $A = \{5,6\}$ est un événement de Ω puisque $A \in P(\Omega)$

2.3 Extension de la notion de probabilité

On appelle événement un groupe de résultats (ou d'éventualités) de l'ensemble fondamentale Ω , donc un sous ensemble de Ω . Par conséquent une éventualité est un événement élémentaire, composé d'un seul élément de Ω . Si Ω est composé de n éléments équiprobables et A un événement, la probabilité de l'événement A est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{n} = \frac{\text{Nombre} - \text{decas} - \text{favorables}}{\text{nombre} - \text{decas} - \text{possibles}}$$

Si $A = \{e\}$ alors $\text{card}A=1$

$P(e) = \frac{1}{n}$ ce qui est compatible avec la probabilité élémentaire.

Si les n événements élémentaires sont équiprobables, chacun à la probabilité $1/n$.

Exemple 1

Dans l'expérience du jet d'un dé, l'ensemble des éventualités $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Soit A = « apparition d'un chiffre pair »

B = « apparition d'un chiffre impair »

$$A = \{2,4,6\}, \quad B = \{1,3,5\}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Conséquences

Soit Ω composé de n éléments équiprobables, A un événement comportant α éléments de Ω ($0 \leq \alpha \leq n$) on a :

$$P(A) = \frac{\alpha}{n}$$

$$1. \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \quad (3)$$

Ω est un événement de cardinal n.

$$2. \quad P(\Omega) = 1 \quad (4)$$

Ω est appelé événement certain.

Par exemple on est sûr lorsqu'on lance un dé que le chiffre obtenu est un chiffre compris entre 1 et 6.

On appelle événements incompatibles ou disjoints deux événements qui s'excluent mutuellement. Par exemple on ne peut pas obtenir à la suite d'un jet de dé un chiffre impair et pair à la fois. Si A et B sont incompatibles :

$$3. \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (5)$$

Si $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, sont incompatibles deux à deux

$$4. \quad P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) \quad (6)$$

Si Φ correspond à l'ensemble impossible

$$P(\Phi) = 0$$

Généralisation de la Notion de Probabilité

2.3.1 Cas d'un référentiel de cardinal fini à éléments non équiprobables

Soit un référentiel comportant un nombre fini n d'éléments mais auxquels on ne peut plus attribuer à chacun des éléments la même probabilité. Alors on attribuera à chacun des éléments e_i une probabilité p_i ($i=1, \dots, n$)

$$p_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$$

Pour un événement A formé des éventualités $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik}$ on pose :

$$P(A) = p_{i1} + \dots + p_{ik}$$

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Conséquences

$$0 \leq p_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, n$$

$$0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B), \forall A, B \text{ incompatibles}$$

2.3.2. Cas générale

Dans le cas où Ω est un ensemble dénombrable ou possède la puissance du continu (ex : $\mathbb{R}$), on peut définir une probabilité : on construit une fonction de probabilité définie sur un sous ensemble $\mathcal{E}$ d'événements $\subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

$$\forall A \in \mathcal{E} \rightarrow p(A) \in [0,1]$$

Cette fonction P doit obligatoirement satisfaire les trois conditions (3), (4), (5), (6).

2.3.3 Algèbre de BOOLE, σ Algèbre, Tribu (Corps de Borel)

Ces notions sont introduites en calcul des probabilités en raison de la règle d'addition des probabilités suivantes :

Si $A \subset \Omega, A \in \mathcal{E}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{E}$

Si $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ est une suite finie de parties de Ω appartenant à $\mathcal{E}$ alors $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{E}$

Si $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ est une suite infinie d'éléments de $\mathcal{E}$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$ si $\mathcal{E}$ possède les propriétés 1 et 2, on dit que $\mathcal{E}$ est une algèbre de Boole, Si $\mathcal{E}$ possède les propriétés 1 et 3 on dit que $\mathcal{E}$ est une σ algèbre.

Remarque

Une σ algèbre est une algèbre de Boole

Exemple

On lance un dé, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ les familles suivantes sont des σ algèbres :

$$\mathcal{E}_1 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{E}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$$

2.3.4 Espace probabilisable

Le couple $(\Omega, \mathcal{E})$ s'appelle espace mesurable ou probabilisable. Tout élément de $\mathcal{E}$ s'appelle événement. Soit $r \in \Omega$, le résultat observé de l'expérience, A est un événement, si $r \in A$, on dit que A est réalisé.

Exemple

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Munissons de la σ algèbre $\mathcal{P}(\Omega)$, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable. Soit l'événement

$A = \{\text{on observe un nombre pair}\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, A est réalisé si on a obtenu lors du lancement un nombre pair.

2.4 Propriétés d'une probabilité

Théorème

Soit un espace de probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, P)$

1. $\forall A \in \mathcal{E}, P(A) = 1 - P(\bar{A})$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $\forall A \in \mathcal{E}, \forall B \in \mathcal{E}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $\forall A \in \mathcal{E}, \forall B \in \mathcal{E}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 5.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite d'événements quelconques

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

Loi de Poincaré

Pour $A_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, n événements de $\mathcal{E}$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r})$$

Exemple (Fiche de TD)

2.5 Probabilités conditionnelles

Soit un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ la probabilité qu'un événement A soit réalisé sachant qu'un autre événement E est déjà réalisé est appelé probabilité de A conditionné par E et est notée $P(A/E)$

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

$$P(E) \neq 0$$

Dans le cas ou Ω est fini nous avons :

$$P(A \cap E) = \frac{\text{Card}(A \cap E)}{\text{card}(E)}$$

$$P(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{card}(\Omega)}$$

$$P(A/E) = \frac{\text{card}(A \cap E)}{\text{card}(\Omega)} \times \frac{\text{card}(\Omega)}{\text{card}(E)}$$

$$P(A/E) = \frac{\text{card}(A \cap E)}{\text{card}(E)}$$

Exemple : on lance deux dés simultanément. Si la somme des chiffres obtenus est égale à 6. Quelle est la probabilité pour qu'un dé ait le chiffre 2.

Soit :

E : « somme des chiffres obtenus est égale à 6 »

$$E = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

A : « apparition du chiffre 2 dans au moins un dé »

La probabilité conditionnelle est :

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

$$A \cap E = \{(2,1), (4,2)\}$$

$$P(A/E) = \frac{2}{6}$$

2.5.1 Principe des probabilités composées

$$1. P(A \cap B) = P(E) \times P(A/E)$$

$$2. P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2 / A_1) \times \dots \times P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Exemple : une urne contient 12 boules dont 4 sont rouge. On choisit 3 boules, une après l'autre de façons aléatoire. Quelle est la probabilité pour que toutes les boules choisies ne soient pas rouges.

Soit l'événement « la i^{ème} boule n'est pas rouge »

La probabilité demandée est :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2 / A_1) \times P(A_3 / A_1 \cap A_2)$$

$$\text{De plus } P(A_1) = \frac{8}{12}, P(A_2) = \frac{7}{11}, P(A_3) = \frac{6}{10}, P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10}$$

Théorème des probabilités totales

Soient les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ formant une partition de c'est-à-dire que ces événements sont disjoints deux à deux et leur réunion est égale à Ω . Soit B un autre événement :

$$\begin{aligned} B \cap \Omega &= B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) \\ &= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) \end{aligned}$$

Les événements $(A_i \cap B)_{i=1, \dots, n}$ forment aussi une partition de Ω

Théorème

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

En utilisant le principe des probabilités composées on obtient :

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \dots + P(A_n)P(B/A_n)$$

Par ailleurs $P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$

Théorème de Bayes

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, P)$, $(A_i)_{i=1}^n$ une partition de Ω si B est un autre événement :

$$(\forall i = 1, \dots, n) P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + \dots + P(A_n)P(B / A_n)}$$

Exemple

Trois machines A, B, C produisent 50%, 30%, 20% simultanément de la production totale. Les proportions de la production défectueuse sont : 3%, 4%, 5% pour les machines A, B, C. on choisit une unité de la production aléatoirement.

1. Quelle est la probabilité que cette unité soit défectueuse.
2. Quelle est la probabilité pour que l'unité choisie défectueuse soit produit par la machine A.

1 /

Soit X : Unité choisie est défectueuse

$$P(X) = P(X \cap A) + P(X \cap B) + P(X \cap C)$$

$$P(X) = P(A)P(X / A) + P(B)P(X / B) + P(C)P(X / C)$$

$$P(X) = 0.5 \times 0.03 + 0.3 \times 0.04 + 0.2 \times 0.05 = 0.037$$

2 /

C'est-à-dire on demande de calculer $P(A / X)$

En utilisant la théorème de BAYES

$$P(A / X) = \frac{P(A)P(X / A)}{P(A)P(X / A) + P(B)P(X / B) + P(C)P(X / C)}$$

$$P(A / X) = \frac{15}{37}$$

L'indépendance

Indépendance de deux événements

On dit que l'événement B est indépendant de l'événement A si la probabilité que B se produise n'est pas affectée par la réalisation ou la non la réalisation de A. autrement dit si :

$$P(B / A) = P(B)$$

Conséquences

Si A et B sont indépendants alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

En effet

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A) = P(B) \times P(A)$$

Exemple

On lance deux dés équilibrés. Soit E_1 l'événement « la somme des dés est égale à 5 », soit F l'événement « le premier dé donne 4 », les événements E_1 & F sont ils indépendants ?

Solution

Nous avons :

$$E_1 = \{(i, j) / i + j = 5\}$$

$$E_1 = \{(3,2), (2,3), (4,1), (1,4)\}$$

$$F = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\}$$

$$P(E_1 \cap F) = P((4,1)) = \frac{1}{36}$$

$$P(E_1) \times P(F) = \frac{4}{36} \times \frac{6}{36} = \frac{24}{36 \times 36}$$

E & F ne sont pas indépendants.

Soit E_2 l'événement : « la somme des dés est égale à 7 »

$$E_2 = \{(3,4), (4,3), (6,1), (1,6), (5,2), (2,5)\}$$

$$P(E_2 \cap F) = P((4,3)) = \frac{1}{36}$$

$$P(E_2) \times P(F) = \frac{6}{36} \times \frac{6}{36} = \frac{1}{36}$$

E_2 & F sont indépendants

Indépendance totale de trois événements

Trois événements E , F et G sont dits totalement indépendants si :

$$P(EFG) = P(E).P(F).P(G)$$

$$P(EF) = P(E).P(F)$$

$$P(EG) = P(E).P(G)$$

$$P(FG) = P(F).P(G)$$

Indépendance totale de n événements

Il est évidemment possible d'étendre la définition d'indépendance totale à plus de trois événements : un ensemble d'événements $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ est dit totalement indépendant si pour tout sous-ensemble $E_1, E_2, E_3, \dots, E_r$, $r \leq n$.

$$P(E_1.E_2.\dots.E_r) = P(E_1).P(E_2).\dots.P(E_r)$$