

Fiche de TD N° 3 - Calculs de probabilités

Exercice 1

Dans une grande surface, on a relevé sur une longue période le nombre d'articles de type A vendus. Une étude permet d'admettre que la variable aléatoire X qui associe à un jour ouvrable tiré au hasard pendant un mois le nombre d'articles de type A vendus ce jour-la a une loi de probabilité définie par le tableau suivant (on donnera les valeurs approchées arrondies à 10^{-2} des résultats).

Nombre vendus x_i d'article	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0.10	0.16	0.25	0.30	0.13	0.05	0.01

1° Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X .

2° Calcul l'espérance mathématique $E(x)$ de la variable aléatoire X . Que représente $E(x)$?

3° Calculer la variance et l'écart type de la variable aléatoire X .

Exercice 2

A- La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x < 2 \\ (x-2)^2 & \text{Si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{Si } x \geq 3 \end{cases}$$

1° Calculer $P\left(1 \leq X \leq \frac{5}{2}\right)$ $P\left(\frac{5}{2} \leq X \leq \frac{7}{2}\right)$ $P\left(\frac{5}{2} \leq X \leq 3\right)$

2° Trouver la densité de probabilité de la variable aléatoire X .

B- Soit la fonction $f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} C(1-x^k) & \text{Si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{Si ailleurs} \end{cases}$$

Où $k \in \mathbb{N}^*$ et $C \in \mathbb{R}$

1° Déterminer les valeurs de C et k pour que $f(x)$ soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire X .

2° Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ pour que $k = 2$. Tracer le graphe de $F(x)$ pour $k=1$.

3° pour $k = 1$

Calculer :

a) $P(X \leq x_0) = \frac{1}{2}$ tel que $P(X \leq x_0) = \frac{1}{2}$

b) $P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right)$ $P\left(X \leq \frac{1}{4}\right)$

Exercice 3

L'un des résultats d'une enquête sociologique sur la violence familiale peut s'exprimer en considérant un couple (X, Y) de variable aléatoires discrètes, où X représente la violence subie par un individu durant son enfance, mesurée par la même échelle 0-1-2, et Y la violence qu'il exerce dans sa

famille, mesurée par la même échelle 0-1-2. Les probabilités « conjointes » estimées sont données par le tableau ci-dessous.

	Y=0	Y=1	Y=2
X=0	0.86	0.04	0.00
X=1	0.03	0.02	0.02
X=2	0.01	0.01	0.01

- Calculer le coefficient de corrélation de X et Y.

Exercice 4

Un couple de variables aléatoires (X, Y) suit une loi de répartition de densité :

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy e^{-(x^2+y^2)} & \text{Si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- 1° Calculer le coefficient k.
- 2° Trouver les lois marginales de X et Y.
- 3° Calculer les densités conditionnelles de X si Y=y et de Y si X=x.
- 4° Calculer E(X), E(Y), V(X) et V(Y).
- 5° Trouver la matrice de covariance de X et Y.

Exercice 5

Une entreprise de transport a un parc total de 150 camions. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque camion tiré au hasard dans le parc, associe la distance qu'il a parcourue dans une journée. (Les distances sont mesurées en Kilomètres) on admet que cette variable aléatoire X soit la loi normale de moyenne 120 et d'écart type 14. Déterminer la probabilité qu'un camion parcourt un jour donné une distance comprise entre 110 et 130 Kilomètres.

Exercice 6

On jette dix fois de suite pièce de monnaie bien équilibrée en notant chaque fois le résultat, ce qui constitue une partie.

- 1° On note x la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le nombre de « face » obtenu.
 - a) Justifier que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale ; on précisera les paramètres de cette loi.
 - b) Calculer la probabilité de l'événement E : « Le nombre de « face » est compris entre 3 et 6 (bornes inclus) ».
- 2° On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par la loi normale de paramètres m et σ .
 - a) Expliquer pourquoi on prend $m = 5$ et $\sigma = \sqrt{2.5}$
 - b) On considère une variable aléatoire Y suivant la loi $N(5; \sqrt{2.5})$. En utilisant cette approximation calculer la probabilité de l'événement : « le nombre de « face » est compris entre 3 et 6, bornes incluses », c'est-à-dire $P(2.5 \leq Y \leq 6.5)$

Exercice 7

Un livre de 1000 pages contient 1500 erreurs réparties au hasard. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'erreurs contenu dans une page quelconque.

- 1° Quelle est la loi de X
- 2° Peut-on faire une approximation de cette loi par une autre ?
- 3° Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.

Bon courage