

Solution TD N° 1 : Élément d'analyse combinatoire

N.B : Les exercices N° 1, 2, 3,4 et 5 sont obligatoires

Exercice 1

Il s'agit de permutations avec répétition (les 25 livres ne sont pas tous distincts), avec $n=25$, $n_1=10$, $n_2=8$ et $n_3=7$. Nous avons :

$$P_{25}^{10,8,7} = \frac{25!}{10!8!7!} = 21034470600$$

2/ il s'agit de combinaisons (l'ordre n'intervient pas) sans répétition (les éléments sont différents), avec $n=140$ et $p=4$. Nous avons :

$$C_{140}^{10} = \frac{140!}{10!(140-10)!} = \frac{140 \times 139 \times 138 \times 137 \times 136 \times 135 \times 134 \times 133 \times 132 \times 131}{1 \times 2 \times \dots \times 10}$$

3/

a. il s'agit des arrangements (l'ordre intervient) avec répétitions, avec $n=6$ et $p=4$. Nous avons

$$A_6^4 = 6^4$$

b. il s'agit des arrangements (l'ordre intervient) sans répétition, avec $n=6$ et $p=4$. Nous avons :

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 360$$

Exercice 2

$$a. (a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$$

$$(a-3)^4 = a^4 + 5a^4(-3) + 10a^3(-3)^2 + 10a^2(-3)^3 + 5a(-3)^4 + (-3)^5$$

$$(a-3)^4 = a^4 - 15a^4 + 90a^3 - 270a^2 + 405a + 243$$

b. Pour tout nombre entiers naturels n et p tels que $P \leq n$:

$$C_n^{p+1} = \frac{n!}{[n-(p+1)]!(n+1)!}$$

$$C_n^{p+1} = \frac{n!}{[n-(p+1)]!(n+1)!}, C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!n!}$$

Or $(n-p)! = (n-p-1) \times (n-p)!$ et $(p+1)! = p!(p+1)$

On réduit au même dénominateur, $(n-p)$ et $(p+1)$ la somme $C_n^p + C_n^{p+1}$

$$C_n^p + C_n^{p+1} = \frac{n!(p+1)}{(n-p)!(p+1)!} + \frac{n!(n-p)}{(n-p)!(p+1)!} = \frac{n![(p+1)+(n-p)]}{(n-p)!(p+1)!}$$

$$C_n^p + C_n^{p+1} = \frac{n!(p+1)}{(n-p)!(p+1)!} = \frac{(n+1)!}{[(n+1)-(p+1)]!(p+1)!} = C_{n+1}^{p+1}$$

Exercice 3

- a) Il y a 32 choix possibles pour la première carte. Pour chaque première carte tirée, il y a 32 choix possibles pour deuxième carte, donc 32×32 choix possibles pour les deux premières cartes tirées.
- b) Deux cartes ayant été tirées, il y a 32 choix possibles pour la troisième carte.
Il y a 32 choix possibles pour la première carte, il y a 31 choix possibles pour la deuxième carte, donc 31×31 choix possibles pour les deux premières cartes tirées.
Deux cartes ayant été tirées, il y a 30 choix possibles pour la troisième carte.
Il y a donc $32 \times 31 \times 30 = 29760$ tirages possibles.

Exercice 4

1. il ya $C_{20}^4 = 4845$ prélèvements possibles.
2.
 - A. le nombre de prélèvements possibles de quatre pièces parmi seize est : $C_{16}^4 = 1820$
 - B. Le nombre de prélèvements avec au moins une mauvaise pièce est la différence entre le nombre de prélèvements avec quatre bonnes pièces, soit, d'après 1° et 2°.A), $C_{20}^4 - C_{16}^4 = 3025$
 - C. il y a quatre choix possibles pour la mauvaise pièce. Pour chaque choix d'une mauvaise, il y a $C_{16}^3 = 560$ choix possibles des trois bonnes pièces. Il y a donc $4 \times 560 = 2240$ prélèvements avec une pièce et une seule mauvaise.
 - D. on utilise les résultats précédents en remarquant qu'on peut obtenir le nombre de prélèvements avec au moins deux mauvaises pièces en retranchant du nombre de prélèvements avec au moins une mauvaise pièce le nombre de prélèvements avec une mauvaise pièce, soit :

$$3025 - 2240 = 785$$

Exercice 5

- a) Il y a 8% des personnes qui parlent couramment l'anglais, soit 80 personnes.

$$\frac{15}{100} \times 80 = 12, \text{ personnes}$$
 On a donc 12 personnes qui possèdent simultanément les deux compétences.
- b) Il y a 920 personnes qui ne parlent pas couramment l'anglais, 5% de ces personnes, c'est à dire

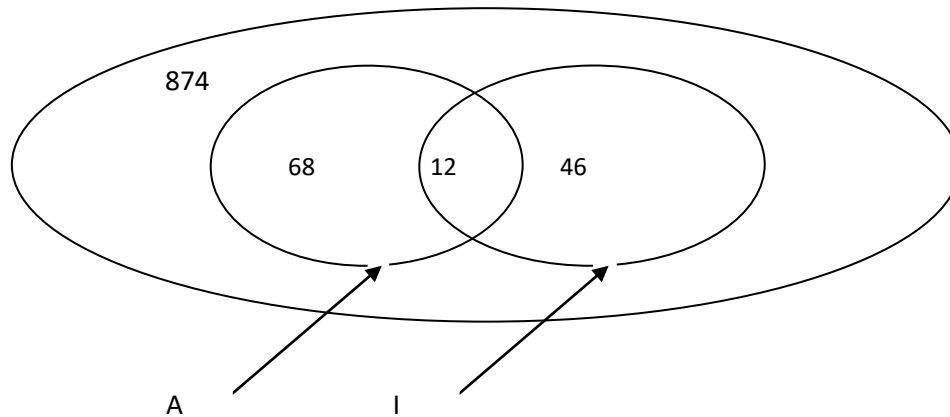
$$920 \times \frac{5}{100} = 46, \text{ possèdent une compétence en informatique.}$$

46 personnes possèdent une compétence en informatique sans parler couramment l'anglais.

- c) Il y a $80 + 46 = 126$ personnes qui possèdent une seule des deux compétences ou les deux à la fois.

$1000 - 126 = 874$, personnes ne possèdent aucune des deux compétences.

Un diagramme possible :



Exercice 6

- a) Le 1^{er} chiffre du nombre peut être choisi de 7 manières différentes, le 2^{ème} de 6 manières, le 3^{ème} de 5 manières et le 4^{ème} de 4 manières. Au total, il y a $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ manières d'écrire un nombre de 4 chiffres choisis parmi les 7 chiffres cités.
- b) Pour qu'un nombre soit inférieur à 5000, il faut que le 1^{er} chiffre soit 1, 2 ou 4, il y a que 3 choix possibles. Pour le 2^{ème} chiffre, 6 chiffres et le 3^{ème} chiffre, 5 choix sont possibles. Pour le 4^{ème} chiffre, il n'y a plus que 4 choix. Il y a ainsi :
 $3 \times 6 \times 5 \times 4 = 360$ nombres inférieurs à 5000.
- c) Le dernier chiffre (4^{ème}) ne peut être que 2, 4, 6 ou 8. Il y a donc 4 façons de le choisir. Le 1^{er} chiffre sera choisi de 6 manières différentes le 2^{ème} de 5 manières différentes et le 3^{ème} de 4 manières.
 On obtient ainsi :
 $6 \times 5 \times 4 \times 4 = 480$ nombre pairs.
- d) Le même raisonnement que précédemment donne : $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ nombre impairs.
- e) Il y a une seule manière de choisir le dernier chiffre d'où le résultat : $6 \times 5 \times 4 \times 1 = 120$ nombres multiples de 5.

Exercice 7

1. On peut former :

$$C_{25}^5 = \frac{25!}{20!5!} = 53130, \text{ sous groupes différents}$$

2. On peut former :

$$C_{15}^3 C_{10}^2 = \frac{15!}{12!3!} \frac{10!}{8!3!} = 53130, \text{ sous groupes contenant 3 garçons et 2 filles}$$

Exercice 8

1) On peut réaliser : $C_7^3 = \frac{7!}{4!3!} = 35$ échantillons de 3 pièces.

2) Parmi les échantillons, il y en a : $C_7^3 = \frac{4!}{1!3!} = 4$ qui contiennent 3 pièces bonnes.

3) parmi les échantillons de 3 pièce, il y en a : $C_4^3 + C_3^2 C_4^1 + C_3^1 C_4^2 = 31$ qui contiennent au moins une pièce bonne.