

## Solution : Fiche TD N° 2- Calculs de probabilités

### Exercice 1

1° l'événement certain, de probabilité 1, est :

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6 .$$

Les événements  $E_i$  étant deux à deux incompatibles.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

Nous avons :  $p_2=p_4$  ;  $p_4=p_6$  ;  $p_1=p_3$  ;  $p_3=p_5$  ;  $p_6=2p_5$ .

D'où :  $p_5 + 2p_5 + p_5 + 2p_5 + p_5 + 2p_5 = 1$

$$9p_5 = 1, p_5 = \frac{1}{9}$$

D'où :  $p_1 = \frac{1}{9}$ ,  $p_2 = \frac{2}{9}$ ,  $p_3 = \frac{1}{9}$ ,  $p_4 = \frac{2}{9}$ ,  $p_5 = \frac{1}{9}$ ,  $p_6 = \frac{2}{9}$ .

2°

a/ notons  $E$  l'événement « Obtenir un résultat pair »

On a  $E_2 \cup E_4 \cup E_6$

Ces événements sont deux à deux incompatibles, d'où  $p(E) = p_2 + p_4 + p_6$  ;

$$p(E) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

b/ Notons  $F$  l'événement « Obtenir un résultat impair »

On a  $F = \bar{E}$ ,  $p(F) = 1 - p(E)$ ,  $p(F) = \frac{1}{3}$

### Exercice 2

a) Il y a  $C_9^3 = 84$  tirages possibles de 3 boules simultanément.

Il y a  $C_4^3 = 4$  façons de choisir 3 boules blanches parmi les 4 de l'urne.

D'où  $p(A) = \frac{4}{84} = \frac{1}{21} = 0.048$

b)  $B$  est l'union de deux événements incompatibles :

$B_1$  : « Tirer 2 boules blanches et 1 noire » ;

$B_2$  : « Tirer 2 boules noires et 1 blanche » ;

Le nombre de tirages possibles de deux boules blanches et une noire est :

$$C_4^2 \times C_5^1$$

$C_4^2$  Nombre de façons de choisir deux boules blanches parmi 4 blanches.

$C_5^1$  Nombre de façons de choisir une boule noire parmi 5 noires.

D'où  $p(B_1) = \frac{5C_4^2}{84} = \frac{30}{84}$ .

Le nombre de tirages possibles de 2 boules noires et 1 blanche est :  $4 \times C_5^2 = 40$ . D'où

$$p(B_2) = \frac{40}{84}$$

Alors  $p(B) = p(B_1) + p(B_2) = \frac{70}{84} = \frac{5}{6} \approx 0.833$

c) on a  $C = A \cup B_1$  ;  $A$  et  $B_1$  sont incompatibles, d'où  $p(C_1) = \frac{4}{84} + \frac{30}{84} = \frac{34}{84} = \frac{17}{42} \approx 0.405$

d) il y a 5 boules portant un numéro impair ; d'où le nombre de cas favorables

Le nombre de tirages possibles de 2 boules noires et 1 blanche est :  $C_5^4 = 10$

$$p(D) = \frac{10}{84} = \frac{5}{42} \approx 0.119$$

### Exercice 3

1°  $\bar{A}$  : « la carte n'est pas un roi »

$\bar{B}$  : « La carte n'est pas un trèfle »

$A \cap B$  : « La carte est le roi de trèfle »

$A \cup B$  : « La carte est un roi ou un trèfle (éventuellement le roi de trèfle) »

2° Il y a équiprobabilités des tirages.

$$p(A) = \frac{4}{32}, \quad p(\bar{A}) = \frac{1}{8}; \quad p(B) = \frac{8}{32}, \quad p(\bar{B}) = \frac{1}{4};$$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A), \quad p(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{8}, \quad p(\bar{A}) = \frac{7}{8};$$

$$p(\bar{B}) = 1 - p(B), \quad p(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{4}, \quad p(\bar{B}) = \frac{3}{4};$$

$$p(A \cap B) = \frac{1}{32},$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \text{ d'où } p(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32}, \quad p(A \cup B) = \frac{11}{32}$$

### Exercice 4

Soient les événements,  $A_i$  : « le  $i^{\text{ème}}$  tireur atteint la cible »  $i=1, 2, 3$ .

$$1^\circ \quad p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1)p(A_2)p(A_3) = 0.7 \times 0.8 \times 0.9 = 0.5$$

2° a/ Première méthode :

$$\text{On a } p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)p(\bar{A}_3) = 0.3 \times 0.2 \times 0.1 = 0.006$$

C'est la probabilité que les trois tireurs ratent la cible simultanément. La probabilité de l'événement contraire est la probabilité cherchée :

$$p = 1 - p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)p(\bar{A}_3) \approx 0.99$$

b/ Deuxième méthode

On note par  $\bar{A}_i$  l'événement : « le tireur  $n^\circ i$  n'atteint pas sur la cible »  $i=1, 2, 3$ .

Au moins un tireur atteint la cible signifie : un, deux ou trois tireurs atteignent la cible.

La probabilité qu'un seul tireur atteint la cible est :

$$p = p(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = p(A_1)p(\bar{A}_2)p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1)p(A_2)p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)p(A_3)$$

$$p = p(A_1)p(\bar{A}_2)p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1)p(A_2)p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)p(A_3) = 0.7 \times 0.2 \times 0.1 + 0.3 \times 0.8 \times 0.1 + 0.3 \times 0.2 \times 0.9 = 0.09$$

La probabilité que deux tireurs atteignent la cible est :

$$p = p(A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3) = 0.4$$

La probabilité que les trois tireurs atteignent la cible est :  $p = p(A_1 A_2 A_3) = 0.5$

La probabilité cherchée est  $p = p_1 + p_2 + p_3 = 0.99$

### Corrigé de la fiche de TD N° 2

Probabilités conditionnelles, composées et indépendance

#### Exercice N° 1

1°)

|                                              | Nombre de puces<br>Défectueuses | Nombre de puces<br>non Défectueuses | Total |
|----------------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|-------|
| Nombre de puces<br>Produites par l'atelier 1 | 20                              | 980                                 | 1000  |
| Nombre de puces<br>Produites par l'atelier 2 | 24                              | 776                                 | 800   |
| Total                                        | 44                              | 1756                                | 1800  |

$$2^\circ) \text{ a) } P(D) = \frac{44}{1800} \quad P(A \cap D) = \frac{20}{1800}$$

$$P(A/D) = \frac{20}{44}$$

$$\text{b) } P(\bar{D}) = \frac{1756}{1800} \quad P(B \cap \bar{D}) = \frac{776}{1800} \quad P(B/\bar{D}) = \frac{776}{1756}$$

$$3^\circ) \text{ on a } P(A \cap D) = \frac{20}{1800} \text{ et } P(A/D) \times P(D) = \frac{20}{44} \times \frac{44}{1800}$$

$$P(A/D) \times P(D) = \frac{20}{1800}$$

$$\text{Donc } P(A \cap D) = P(A/D) \times P(D)$$

$$\text{On vérifie de même que } P(B \cap \bar{D}) = P(B/\bar{D}) \times P(\bar{D})$$

#### Exercice N°2

A°) l'événement A est la réunion de deux événements incompatibles.

A1 : « les deux boules sont rouges »

A2 : « les deux boules sont noires »

$$P(A_1) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} \text{ et } P(A_2) = \frac{1}{10} \text{ d'où } P(A) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

B°) il y a quatre tirages favorables possibles :

La rouge n°1 et la noire n°2, la rouge n°2, la noire n°1

La rouge n°1 et la rouge n°2, la noire n°1, la noire n°2

D'où la probabilité  $P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

C°)  $A \cap B$  est l'événement « les deux boules sont de même couleur et la somme des numéros portés est 3.

$$P(A \cap B) = \frac{2}{10}, P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

### **Exercice N° 3**

Soient les événements suivants :

A : « Un malade est atteint de la maladie A »

B : « Un malade est atteint de la maladie B »

C : « Un malade est atteint de la maladie C »

On a  $P(A) = 0.4$ ,  $P(B) = 0.3$ ,  $P(C) = 0.3$

Soient l'événement F « un malade est fumeur »

On a :  $P(F/A) = 0.5$ ,  $P(F/B) = 0.6$ ,  $P(F/C) = 0.4$

On cherche :  $P(F) = ?$

$$P(F) = P(F \cap A) + P(F \cap B) + P(F \cap C)$$

$$P(F) = P(A)P(F/A) + P(B)P(F/B) + P(C)P(F/C)$$

$$P(F) = 0.4 \times 0.5 + 0.3 \times 0.6 + 0.3 \times 0.4 = 0.5$$

### **Exercice N° 4**

Soient les événements :

A : « l'élève choisit l'itinéraire A »

B : « l'élève choisit l'itinéraire B »

C : « l'élève choisit l'itinéraire C »

D : « l'élève choisit l'itinéraire D »

On a  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$ ,  $P(C) = \frac{1}{12}$

Soit l'événement R : « l'élève arrive en retard »

On a :  $P(R/A) = \frac{1}{20}$ ,  $P(R/B) = \frac{1}{10}$ ,  $P(R/C) = \frac{1}{5}$  et  $P(R/D) = 0$

A° comme  $\sum_i P_i = 1 \Rightarrow P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1 \Rightarrow P(D) = \frac{1}{3}$

Car A, B, C et D est un espace complet d'événements

B°

$$\begin{aligned} P(C/R) &= \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{P(R \cap C)}{P(R \cap A) + P(R \cap B) + P(R \cap C) + P(R \cap D)} \\ &= \frac{P(R \cap C)}{P(A) \times P(R/A) + P(B) \times P(R/B) + P(C)P(R/C) + P(D)P(R/D)} \end{aligned}$$

$$P(C/R) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{12} \times \frac{1}{5}}{\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{5}\right)} = \frac{2}{7}$$

### Exercice N°5

A : « parmi les 13 cartes choisies, figure un seul as »

B : « parmi les 13 cartes choisies, figure l'as de piques »

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}}}{\frac{C_{51}^{12}}{C_{52}^{13}}} = \frac{C_{48}^{12}}{C_{52}^{12}}$$

### Exercice N°6

1° désignons par  $A_i$  l'événement disant que « la personne  $i$  retrouve son chapeau ». La probabilité cherchée est donc :

$$P_n = P\left[\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right] = 1 - P\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = 1 - \left[ \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \right]$$

$$P_n = 1 - \left[ C_n^1 \times \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \times \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \times \frac{(n-3)!}{n!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \right]$$

$$P_n = 1 - \left[ 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \right]$$

$$P_n = \left[ \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \right]$$

2°

$$\begin{aligned} & P\left[\left(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap \overline{A_k} \cap \overline{A_{k+1}} \cap \dots \cap A_n\right) \cup \dots \cup \left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{n-k}} \cap A_{n-k+1} \cap \dots \cap A_n\right)\right] \\ &= C_n^k P\left(A_1 \cap \dots \cap \overline{A_k} \cap \overline{A_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{A_n}\right) \\ &= C_n^k P\left(\overline{A_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{A_n} / A_1 \cap \dots \cap A_k\right) \times P(A_1 \cap \dots \cap A_k) \\ &= C_n^k P_{n-k} \times \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{P_{n-k}}{k!} \end{aligned}$$

### Exercice N°7

1°  $P(A) = \frac{5}{3} > 0$  est une donnée aberrante. En effet, pour tout événement A,  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

2° A et B sont indépendantes si et seulement si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  donc

$$\frac{2}{5} = P(A) \times \frac{2}{4}, P(A) = \frac{2/5}{2/4}, P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{2}, P(A) = \frac{8}{10}$$

$$3° P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/5}{8/10}$$

$$P(B/A) = \frac{2}{5} \times \frac{10}{8} = \frac{3}{4}$$

### Exercice N°8

1°

|                |                |                                   |
|----------------|----------------|-----------------------------------|
| R              | R              | (R,R)                             |
|                | V              | (R,V)                             |
|                | B <sub>1</sub> | (R,B <sub>1</sub> )               |
|                | B <sub>2</sub> | (R,B <sub>2</sub> )               |
| V              | R              | (V,R)                             |
|                | V              | (V,V)                             |
|                | B <sub>1</sub> | (V,B <sub>1</sub> )               |
|                | B <sub>2</sub> | (V,B <sub>2</sub> )               |
| B <sub>1</sub> | R              | (B <sub>1</sub> ,R)               |
|                | V              | (B <sub>1</sub> ,V)               |
|                | B <sub>1</sub> | (B <sub>1</sub> ,B <sub>1</sub> ) |
|                | B <sub>2</sub> | (B <sub>1</sub> ,B <sub>2</sub> ) |
| B <sub>2</sub> | R              | (B <sub>2</sub> ,R)               |
|                | V              | (B <sub>2</sub> ,V)               |
|                | B <sub>1</sub> | (B <sub>2</sub> ,B <sub>1</sub> ) |
|                | B <sub>2</sub> | (B <sub>2</sub> ,B <sub>2</sub> ) |

2°)

a)

Il y a quatre résultats avec la première boule tirée rouge. Donc  $P(E_1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Il y a huit résultats avec la deuxième boule tirée bleue. Donc  $P(E_2) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$\text{b) } P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \text{ et } P(E_1) \times P(E_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2) = \frac{1}{8}$$

$E_1$  et  $E_2$  sont indépendants