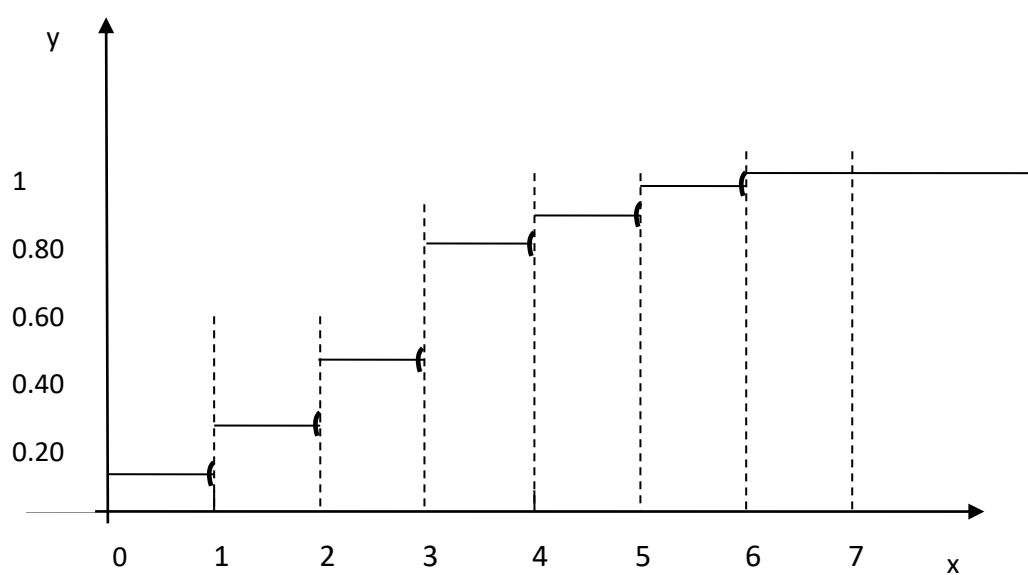


Corrigé – Fiche de TD 4

Exercice 1

1° La fonction de répartition F de la variable aléatoire X est définie par le tableau :

X appartenant à l'intervalle	$F(x)=P(x)\leq x$
$]-\infty, 0 [$	0.00
$[0, 1 [$	0.10
$[1, 2 [$	0.26
$[2, 3 [$	0.51
$[3, 4 [$	0.81
$[4, 5 [$	0.94
$[5, 6 [$	0.99
$[6, +\infty [$	1



2° En appliquant les formules, on obtient :

$E(X) = 2.39$, $E(X)$ représente le nombre moyen de pièces vendues par jour si on répète l'épreuve un très grand nombre de jours.

$$V(X) = 1.81 ; \delta(X) = 1.36$$

Exercice 2

A

1

$$1) \quad P\left(1 \leq X \leq \frac{5}{2}\right) = F\left(\frac{5}{2}\right) - F(1) = \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 - 0 = \frac{1}{4}$$

$$2) \quad P\left(\frac{5}{2} \leq X \leq \frac{7}{2}\right) = F\left(\frac{7}{2}\right) - F\left(\frac{5}{2}\right) = 1 - \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$3) \quad P\left(\frac{5}{2} \leq X \leq 3\right) = F(3) - F\left(\frac{5}{2}\right) = 1 - \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 = \frac{3}{4}$$

2. Par un calcul direct on trouve :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x < 2 \\ 2(x-2) & \text{Si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{Si } x \geq 3 \end{cases}$$

II-

$f(x)$ est positive pour tout x réel. Comme $k \in N^*$, $1-x \geq 0$ du fait que $0 \leq x \leq 1$; donc $c > 0$

Il faut vérifier la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \int_0^1 C(1-x^k) dx = c \left(1 - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) = 1 \text{ on a alors, } c = \frac{k+1}{k}$$

Pour tout couple (c, k) lié par la relation précédente, c'est-à-dire $\left(\frac{k+1}{k}, k\right) = (c, k)$,

$\left(\frac{k+1}{k}, k\right) = (c, k)$, $f(x)$ définit une densité de probabilité.

On a par exemple $(2, 1); \left(\frac{3}{2}, 2\right); \left(\frac{4}{3}, 3\right), \dots, \left(\frac{n+1}{n}, n\right), \dots$

2) pour $k = 2$, $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2) & \text{Si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{Si ailleurs} \end{cases}$ et

et

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x < 0 \\ \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) & \text{Si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$$

Pour $k = 1$, $f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{Si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{Si ailleurs} \end{cases}$ et $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x < 0 \\ 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right) & \text{Si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{Si } x \geq 1 \end{cases}$

3) A) on a : $2 \int_0^{x_0} (1-x) dx = \frac{1}{2}$, donc $2x_0 - x_0^2 = \frac{1}{2}$

La résolution nous donne $x_{01} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.29$ et $x_{02} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.70$

Mais puisque $x \in [0,1]$, la valeur cherchée est $x_{01} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.29$.

La fonction $f(x)$ étant choisie pour $k = 1$

b) $P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right) = 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (1-x) dx = \frac{1}{2}$

$P\left(X < \frac{1}{4}\right) = 2 \int_0^{\frac{1}{4}} (1-x) dx = \frac{7}{16}$

Exercice 3

Le tableau suivant donne l'ensemble des probabilités, incluant celles des lois marginales :

	Y=0	Y=1	Y=2	
X=0	0.86	0.04	0.00	0.90
X=1	0.03	0.02	0.02	0.07
X=2	0.01	0.01	0.01	0.03
	0.90	0.07	0.03	

On calcule alors, avec les formules habituelles

$E(X) = 0.13$, $V(X) = 0.1731$; $\delta(X) = 0.416$

Puis

$$E(Y) = 0.13, V(Y) = 0.1731; \delta(Y) = 0.416$$

La covariance se calcule par : $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = 0.1031$

$$Coc(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Et on obtient enfin le coefficient de corrélation

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = 0.596$$

Exercice 4

La fonction $f(x, y)$ est une densité de probabilité si $f(x, y) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

D'une part $k \geq 0$ et d'autre part $k \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = 1$

On a : $k \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-y^2} dy = 1$ ce qui donne $k = 4$

2) les fonctions d densités de probabilité marginales sont :

$$f(x)_1 = \int_0^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 4x y e^{-x^2 - y^2} dy = 2x e^{-x^2} \text{ si } x > 0$$

$$f(x)_1 = 0 \text{ si } x < 0$$

Par symétrie on a $f_2(y) = 2y e^{-y^2}$ si $y > 0$

$$f_2(y) = 0 \text{ si } y \leq 0$$

4) La densité conditionnelle de X si Y=y est

$$f_1(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} 2x e^{-x^2} & \text{Si } x > 0 \\ 0 & \text{Si } x \leq 0 \end{cases}$$

De même

$$f_2(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \begin{cases} 2y e^{-y^2} & \text{Si } y > 0 \\ 0 & \text{Si } y \leq 0 \end{cases}$$

On remarque que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes puisque

$$f_1(x/y) = f_1(x) \text{ et } f_2(y/x) = f_2(y)$$

Une autre condition est vérifiée aussi :

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

$$4) E(X) = \int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{De même } E(Y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{Pour le calcul de la variance } V(X) = \int_0^{+\infty} 2x^3 e^{-x^2} dx = 1 \text{ donc } V(X) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{De même } V(Y) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

5) Puisque X et Y sont des variables aléatoires indépendantes on a $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Et la matrice des covariances s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

Exercice 5

La variable aléatoire X suit la loi normale $N(120, 14)$

On cherche $P(110 \leq X \leq 130)$

La variable aléatoire $T = \frac{X - 120}{14}$

Soit la loi normale centrale $N(0, 1)$ réduite on obtient :

$$P(110 \leq X \leq 130) = P\left(-\frac{5}{7} \leq T \leq \frac{5}{7}\right)$$

$$P\left(-\frac{5}{7} \leq T \leq \frac{5}{7}\right) = 2\Pi(0.7143) - 1$$

La table de formulaire donne $\Pi(0.71) = 0.7611$

Et $\Pi(0.72) = 0.7642$

$$P(50 \leq X \leq 60) = 2 \times 0.7624 - 1$$

$$P(50 \leq X \leq 60) = 0.5246$$

Exercice 6

- 1) A) on a une épreuve aléatoire pouvant déboucher sur deux résultats seulement, pile ou face, de probabilités respectives $1/2$ et $1/2$. On répète dix fois cette épreuve et les dix épreuves sont indépendantes.

X suit la loi binomiale $N\left(10, \frac{1}{2}\right)$

b) $P(E) = P(X \in \{3, 4, 5, 6\})$

Les variables aléatoires sont incompatibles

$$P(E) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$P(X = 3) = C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0.117$$

$$P(X = 4) = C_{10}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0.205$$

$$P(X = 5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.246$$

$$P(X = 6) = C_{10}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.205$$

$$P(E) = 0.773$$

- b) d'après le cours sur l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale, on prend

$$m = np \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

$$n = 10 \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad m = 5 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{2.5}$$

$$P(3 \leq X \leq 6) = P(2.5 \leq Y \leq 6.5)$$

En utilisant la variable normale centrée réduite :

$$T = \frac{Y - 5}{\sqrt{2.5}}$$

et la table du formulaire, on obtient :

$$P(E) = \Pi(0.95) - \Pi(-1.58)$$

$$P(E) = \Pi(0.95) - (1 - \Pi(-1.58)) = 0.772$$

Exercice 7

- 1) Une erreur peut appartenir ou ne pas appartenir à une page donnée. Le résultat est une épreuve de BERNOULLI de paramètre p . le nombre X d'erreurs de cette page est :

$$X = \sum_{i=1}^{1500} X_i$$

Où

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si l'erreur appartient à cette page} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 1500$$

X Suit une loi binomiale $B(n, p) = B(1500, p)$

Le nombre d'erreurs moyen par page est $np = \frac{1500}{1000}$ et $p = \frac{1}{1000}$

- 2) On peut faire une approximation de cette loi par une loi de Poisson puisque.

$$n=1500 > 50 \text{ et } p = \frac{1}{1000} < 0.1 ; \text{ On aura :}$$

$$P(X = x) = e^{-np} \frac{(np)^x}{x!} = e^{-1.5} \frac{(1.5)^x}{x!}$$

$$3) P(X = 0) = e^{-1.5} \frac{(1.5)^0}{0!} = 0.05$$

$$P(X = 1) = e^{-1.5} \frac{(1.5)^1}{1!} = 0.075$$

$$P(X \leq 2) = e^{-1.5} \frac{(1.5)^0}{0!} + e^{-1.5} \frac{(1.5)^1}{1!} + e^{-1.5} \frac{(1.5)^2}{2!} = 0.18$$