L3/TC- OP -2020/21

Exercice 1 :

Soit un champ $\overrightarrow{E}(M,t)=Eoe^{j(\omega t-k.y)}\overrightarrow{i}$ d'amplitude $Eo = 100V/m$ se propageant à f=100Mhz dans un milieu caractérisé par $\mu r = 1; \varepsilon r = 4$ et $\sigma = 0,1$

1. Donner l'équation de propagation en champ $\overrightarrow{E}$?
2. Donner la constante de propagation k ?
3. Montrer que l'onde est plane ?
4. Montrer que $\overrightarrow{E}(M,t)$ est solution de cette équation ?
5. Calculer la constante d'atténuation β ?

Solution :

1. On calcule le rotationnel de l'équation de Maxwell $\overrightarrow{rot\ rotE}=-\overrightarrow{rot}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ = - $j\omega\overrightarrow{rotB}$ = - $j\omega\mu\ \overrightarrow{rotH} = -j\omega\mu(\overrightarrow{J}+\frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t})$ = $-j\omega\mu(\sigma\overrightarrow{E}+j\omega\varepsilon\overrightarrow{E})= \omega^2\mu\varepsilon(1-j\sigma/\omega\varepsilon)\overrightarrow{E}$
comme $\overrightarrow{rot\ rotE}=\overrightarrow{graddivE}-\Delta\overrightarrow{E} = -\Delta\overrightarrow{E}$ car $div\overrightarrow{E}=0$ on tire l'équation d'onde :
$\Delta E + \omega^2\mu\varepsilon(1-j\sigma/\omega\varepsilon)E = 0$
2. L'équation d'onde $\Delta E + k^2 = 0$ permet de tirer $k^2= \omega^2\mu\varepsilon(1-j\sigma/\omega\varepsilon)$ d'où $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon *}$ où $\varepsilon^*=\varepsilon o\varepsilon r^*$ et $\varepsilon r^*=\varepsilon r-j\sigma/\omega\varepsilon o$ avec $\varepsilon=\varepsilon o\varepsilon r$
3. On calcule $\Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = -k^2E$ qui montre que $\overrightarrow{E}$ est solution de l'équation d'onde.
4. Avec $k=\alpha+j\beta$ on tire $\beta= -\omega\sqrt{\frac{\mu o\varepsilon o}{2}}\sqrt{-\varepsilon r + \sqrt{\varepsilon r^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}} = - -0,92$
5. Avec $\overrightarrow{rotE}= -j\omega\mu\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{rotE} = (-jkE)\overrightarrow{k}$= $-jkEoe^{j(\omega t-ky)}\overrightarrow{k}$ *on tire* $\overrightarrow{H}(M,t)=k/\omega\mu Eoe^{j(\omega t-ky)}\overrightarrow{k}$= $Hoe^{j(\omega t-ky)}\overrightarrow{k}$ on montre que l'onde est plane car :

- $Eo/Ho=\omega\mu/k = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon *}}$ =Z=Impédance du milieu car $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon *}$
- $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{H}$ sont en phase
- $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{H}$ sont perpendiculaires entre eux et à la direction de propagation Oy

Exercice 2 : propagation au-dessus du sol

Un émetteur situé à une altitude he=800m rayonne à f=3Ghz un champ à polarisation verticale d'intensité Eo=100V/m vers une antenne située à hr=200m à une distance D=10km au-dessus d'un sol caractérisé par

$$\mu r = 1; \varepsilon r = 4 \text{ et } \sigma = 0,1$$

1. Donner la fréquence de transition ft caractéristique au sol ?
2. Déterminer l'impédance caractéristique du sol Zsol ?
3. Calculer le coefficient de réflexion Rv ?
4. Donner le champ reçu Ereçu ?
5. Pour quelle altitude hrmax le champ reçu est maximum ?

<u>**Solution :**</u>

1. **ft= $\sigma/2\pi\varepsilon o\varepsilon r$ = 450Mhz** $\ll f$
2. **Zsol=$\sqrt{\mu/\varepsilon *}$ = $\sqrt{\mu o/\varepsilon o}$ /$\sqrt{\varepsilon r *}$ = Zo / $\sqrt{\varepsilon r}$ =Zo/2 car $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon o}$ = 0,47 $\ll$ εr=4**
3. **Rv=(Zocosθi−Zsolcosθt)/ (Zocosθi+Zsolcosθt)**

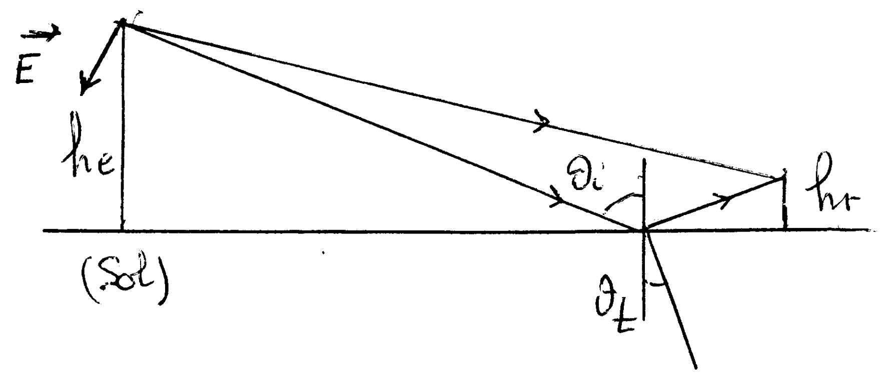
or tgθi=D/(he+hr) qui donne θi=84,3 et la loi de Snell-Descartes : nosinθi=nsolsinθt donne θt=29,8 car no=1(air) et nsol=Réel($\sqrt{\varepsilon r *}$) =$\sqrt{\varepsilon r}$ =2 d'où Rv=−0,62

4. **Ereçu=Eo + Rv.Eo$e^{j\Delta\Phi}$ avec $\Delta\Phi$ = 2k. hehr/D =640π=déphasage du au parcours entre le champ direct Eo et le champ réfléchi Eor=RvEo par le sol et k=2π/λ (cste de propagation dans le vide)** $E_{recu} = E_o(1 - 0{,}62) = 0{,}38 E_o$ car $e^{j640\pi} = 1$
5. **On a une interférence positive quand le champ reçu est > Eo donc comme Rv< 0 alors $e^{j\Delta\Phi max} = -1$ d'où ΔΦmax=(2m+1)π et hrmax=(2m+1)(D/2k.he) ;m=0 ;1 ;2… hrmax=(2m+1)0,3125 m .**

Par exemple pour m=1000 n aura la solution hr=315,6m

EreçuMax=1,62 Eo=162V/m car cela dépend aussi de Rv

Si Rv=1(réflexion totale) on aura EreçuMax=2Eo



L3/TC /OP

Exo3 : Ellipsoïde de Fresnel

On considère un obstacle de hauteur ho=150m au-dessus du sol à une distance de=8km d'un émetteur situé à une altitude he=800m et distant de D=10km d'un récepteur situé à hr=200m pour une fréquence f=100Mhz un champ Eo=100V/m.

1. **Montrer que l'obstacle influe sur cette liaison radio ?**
2. **Déterminer l'atténuation AdB due à cet obstacle ?**
3. **Calculer le champ atténué E ?**

Solution : (fig1)

1. **il y a influence car l'obstacle pénètre l'ellipsoïde de Fresnel de dimension**

do=$\sqrt{\lambda}\sqrt{de.dr/D}$ =69,28m au niveau de l'obstacle car ho=150km >h-do=130,72m

2. **En dessous de l'axe de l'ellipsoïde de Fresnel,l'atténuation est linéaire représentée par la droite AB d'équation y=ax+b= (-6,4/do)x -6,4 sachant qu'au point A(x=0 et y=-6,4dB) et au point B (x=-do et y=0dB).Donc au niveau de l'obstacle,x=- (h-ho)=-50 et l'atténuation en champ sera AdB=y=$-1,78$dB**
3. **En valeur réelle A=$10^{-1,78/20}$=0,81=E/Eo d'où le champ atténué E=81V/m.**

Exo4 : Courbure terrestre

Soit un émetteur situé à he=400m et un récepteur situé à hr=100m distants D=200km au-dessus de la terre réelle de rayon Ro=6400km.

1. **Montrer qu'il n'y a pas de visibilité directe entre l'émetteur e le récepteur ?**
2. **Pour établir une liaison radio on utilise un relais.A quelle distance du récepteur et à quelle altitude hRdoit-on placer le relais ?**

Solution : (fig2)

1. **Pas de visibilité car D>Dlim=$\sqrt{2Ro}(\sqrt{he}+\sqrt{hr})$ = 107,33km**
2. **Limite de visibilité entre émetteur et relais : de= $\sqrt{2Ro}(\sqrt{he}+\sqrt{hR})$ et**

Limite de visibilité entre relais et récepteur : dr=$\sqrt{2Ro}(\sqrt{hR}+\sqrt{hr})$avec de+dr=D

On trouve hR≥167,26m, de=117,87km et dr=82,13km

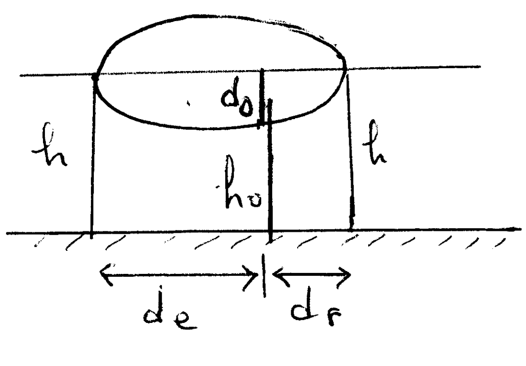


fig 1

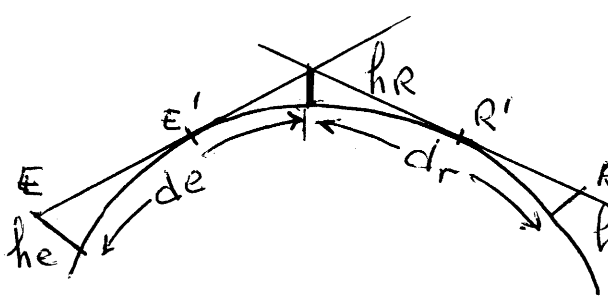


fig 2

L3/TC /OP

Exo5 : Réfraction atmosphérique

Une onde EM de fréquence f=300Mhz est émise au sol sous un angle φo dans une atmosphère caractérisée par $\Delta n = -3,92.10^{-8}$ par m pour être reçue à une distance D=1000km.

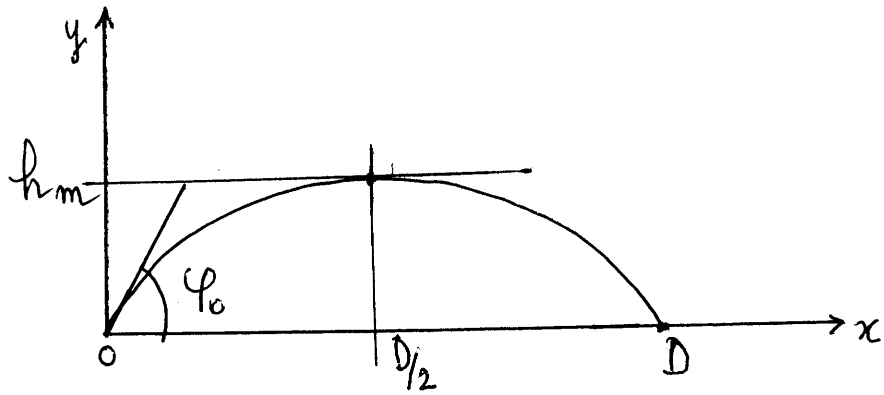
1. **Déterminer l'angle d'émission φo ?**
2. **Déterminer l'altitude hm de retour de l'onde vers le sol ?**

Correction :

1. **Equation de la trajectoire parabolique de l'onde $y(x)=ax^2+bx+c=ax^2+bx$ car $c=0$ pour $y(x=0)=0$ et $y'(x)=2ax+b$ qui pour $y'(x=D/2)=0$ onaura $a=b/D$ et pour $y'(x=0)=tg\varphi o$ on aura $b=tg\varphi o$ d'autre part $y(x=D/2)=a(D/2)^2+b(D/2)=hm$ avec $\cos\varphi o=n(h)=1-hm|\Delta n|$**

comme φo petit $tg\varphi o\approx\varphi o$ et $\cos\varphi o\approx 1-\varphi o^2/2$ d'où : $\varphi o=(D/2)|\Delta n|=0{,}0196$rds soit $\varphi o=1{,}12°$

2. **De même on tire hm=4,9km**



Exo6 : **Terre apparente**

On donne $\Delta n = -4.10^{-8}$ par m et la distance D=200km entre un émetteur et un récepteur au-dessus de la terre de rayon Ro=6400km.Pour f=3Ghz,

1. **Calculer le rayon R de la terre apparente ?**
2. **Montrer que la visibilité augmente en terre apparente ?**
3. **Déterminer l'altitude hlim des antennes à la limite de visibilité ?**
4. **Déterminer l'altitude hmin pour dégager l'ellipsoïde de Fresnel entre l'émetteur et le récepteur ?**

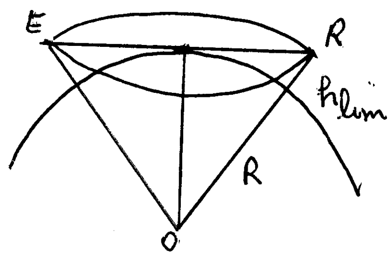
Correction :

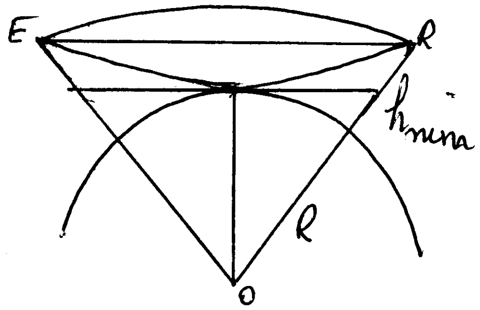
1. **$R = Ro / (1 - Ro|\Delta n|) = 8602km$**
2. **Limite de visibilité en terre réelle : $Dlim = \sqrt{2Ro}\,(\sqrt{he} + \sqrt{hr})$**

Limite de visibilité en terre apparente : $D'lim = \sqrt{2R}\,(\sqrt{he} + \sqrt{hr})$ avec R=K. Ro où $K = 1/(1 - Ro|\Delta n|) = 1{,}34$ on trouve $D'lim = \sqrt{K}Dlim = 1{,}15\,D$ comme D'lim>Dlim la visibilité augmente en terre apparente.

3. **$D = \sqrt{2R}(2\sqrt{hlim})$ donne hlim=581m**
4. **Dimension de l'ellipsoïde de Fresnel : $do = \sqrt{\lambda}\sqrt{de.dr/D} = \sqrt{\lambda D/4} = 70{,}7m$ avec $\lambda = c/f = 0{,}1m$**

   Pour dégager l'ellipsoïde de la courbure terrestre à la limite on aura :
   $(R+hmin)^2 = (R+do)^2 + (D/2)^2$
   $R^2 + hmin^2 + 2R.hmin = R^2 + do^2 + 2R.do + D^2/4$
   avec R≫ hmin et do on écrit : $hmin = do + D^2/8R = 652m$





Exo7 : **Ionosphère**

On considère une ionosphère où Cmoy=10^5 collisions /s.
A une altitude hm=200km,et à f =determiner :

1. **La densité ionique N(hm) ?**
2. **La fréquence caractéristique fp à cette altitude ?**
3. **L'indice de réfraction n(hm) ?**
4. **L'angle d'émission au sol φo pour que l'onde puisse retourner au sol à cette altitude hm ?**

Correction

1. **N(hm) = Nmax – 17,36 (hm – hmax)² avec Nmax=10^{12}e-/m³ et hmax=300km**
   on trouve N(hm) = 0,8264.10^{12}e-/m³
2. **fp= $9\sqrt{N(hm)}$ = 8,18Mhz**
3. **n(hm) = $\sqrt{1 - (fp/f)^2}$ = 0,575218**
4. **cosφo =n(hm) donne φo=54,88°**

Exo8 : Ionosphère

1. **Donner la fréquence limite f lim pour établir une liaison terrestre ?**
2. **Déterminer la l'altitude hm de retour sur terre d'une onde émise au sol sous un angle φo= 50° à f=10Mhz ?**

Solution

1. **f lim >= fpmax= 9Mhz $\forall \text{soit } \varphi o$**
2. **f=MUF= fp /sin φo = $9\sqrt{N(hm)}$ / sinφo donne N(hm)= 0,72439.10^{12} e-/m³**
   avec N(hm) =Nmax $- 17,36(hm - hmax)^2$ on aura :
   hm= hmax $\pm \sqrt{(Nmax - N(hm))/17,36}$ qui donne 2 solutions :
   hm=174km et hm= 426km mais c'est la solution hm=174km qui convient pour un retour de l'onde vers la terre.

<u>Exo9</u> : onde et propagation

Une onde EM à polarisation horizontale de puissance PodB=2dB est transmise sous incidence normale suivant l'axe Oz à f=30Mhz de l'air à un milieu (sol) caractérisé par $\mu r = 1$,$\varepsilon r = 4$ et $\sigma = 0{,}01$

1. **Donner le champ E(z) transmis dans ce milieu ?**
2. **Calculer la puissance de l'onde à une profondeur zo=10m ?**
3. **Calculer l'atténuation AdB subie à l'onde jusqu'à cette profondeur ?**
4. **Déterminer la profondeur zm pour laquelle l'atténuation AdB= − 40dB ?**

<u>Correction :</u>

1. **$E(z) = T\,Eo\; e^{j(\omega t - kz)}$ où $k = \alpha + j\beta$ dans le sol**
   $Po = 10^{PodB/10} = 1{,}585$ W/m² = $Eo^2/240\pi$ d'où Eo=34,56V/m

Coefficient de transmission de l'air au sol : T= 2Zsol / (Zsol + Zo) avec Zso=Zo /$\sqrt{\varepsilon r *}$
et $\varepsilon r * = \varepsilon r - j\sigma/\omega\varepsilon o = 4 - j6$ et $\sqrt{\varepsilon r *} = 2{,}37 - j1{,}26$
on trouve $|T| = 0{,}75$ et la constante d'atténuation $\beta = -0{,}85$
d'où l'amplitude du champ transmis à une profondeur z : $|E(z)| = \left|TEoe^{\beta z}\right|$
à zo=10m on aura $|E(zo)| = 5{,}2$mV/m

2. **Puissance de l'onde à zo : $P(zo) = |E(zo)|^2/240\pi = 3{,}56$ mW/m²**
3. **Atténuation totale : AdB= $20\text{Log}|(E(zo)/Eo)| = -76{,}45$dB**

L'onde s'atténue d'abord lors de la transmission dans le sol puis dans le sol suivant la profondeur zo.

4. **$20\text{Log}\left|TEoe^{\beta zm}\right| = -40$dB donne zm= 5m**