Chapitre 1 : Signaux et Systèmes continus

Introduction

Ce module fait suite au module Traitement du signal L2 TC. On suppose donc que l'étudiant est déjà familiarisé avec les notions suivantes :

- signal et système continu
- signal à énergie finie et signal à puissance moyenne finie
- réponse impulsionnelle d'un système
- linéarité et invariance d'un système
- différentes définitions des signaux (fonction rectangulaire, fonction triangulaire, impulsion de Dirac etc.)
- la série de Fourier (Forme 1, Forme 2 et Forme 3)

Transformée de Fourier (Rappel)

La transformée de Fourier permet une représentation fréquentielle du signal ce qui facile son étude. Elle est très utilisée en traitement du signal.

Considérons une fonction quelconque, non périodique, on montre qu'elle peut se décomposer sous la forme :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f).e^{i2\pi ft}.df$$

où

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-i2\pi ft}.dt$$

On dit que $X(f)$ est la transformée de Fourier de $x(t)$

La transformée de Fourier existe si les 3 conditions de Dirichlet sont vérifiées (conditions suffisantes mais pas nécessaires) :

1) x(t) possède un nombre fini de discontinuités sur tout intervalle fini
2) x(t) possède un nombre fini de maximas et de minima sur tout intervalle fini
3) x(t) est absolument intégrable, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|.dt < +\infty$$

Etude d'un exemple : Impulsion rectangulaire

On considère l'impulsion rectangulaire x(t)= $rect_T(t)$ définie comme suit :

$$rect_T(t) = \begin{cases} 1 \;\; si \;\; t \in \left[-\frac{T}{2}, \quad \frac{T}{2}\right] \\ 0 \qquad\qquad ailleurs \end{cases}$$

Après calcul de la transformée de Fourier on a :

$$X(f) = AT\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = AT\mathrm{sinc}(fT)$$

Impulsion de Dirac

La transformation de Fourier est utilisée pour les signaux qui vérifient les conditions de Dirichlet. L'utilisation de l'impulsion de Dirac permet d'étendre l'application de la transformation de Fourier aux signaux à puissance moyenne finie.

On appelle par impulsion de Dirac la fonction δ(t)

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \;\; si \; t = 0 \\ 0 \;\; ailleurs \end{cases}$$

Avec

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

L'impulsion de Dirac fait partie de la théorie des distributions. Dans la suite de ce cours nous admettrons les formules suivantes :

$$\delta(t) \overset{TF}{\Rightarrow} 1$$

$$1 \overset{TF}{\Rightarrow} \delta(f)$$

$$\delta(t - t_0) \overset{TF}{\Rightarrow} e^{-i2\pi f t_0}$$

$$e^{-i2\pi f_0 t} \overset{TF}{\Rightarrow} \delta(f - f_0)$$

Transformée de Fourier des fonctions trigonométriques

Pour déterminer la TF des fonctions sinusoïdales, il suffit d'appliquer les formules d'EULER :

$$\cos(2\pi f_0 t) = \left(e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}\right)/2$$

$$\sin(2\pi f_0 t) = \left(e^{i2\pi f_0 t} - e^{-i2\pi f_0 t}\right)/2i$$

Nous avons alors :

$$TF[\cos(2\pi f_0 t)] = [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]/2$$

$$TF[\sin(2\pi f_0 t)] = [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]/2i$$

Transformée de Fourier de la fonction signe sgn(t) :

On montre que :

$$TF[sgn(t)] = \frac{1}{j\pi f}$$

<u>Transformée de Fourier de l'échelon unité</u> :

On montre que l'échelon unité U(t) peut être exprimé par la fonction signe comme suit :

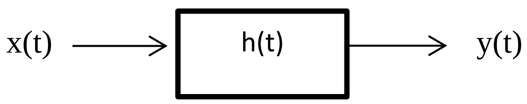
U(t) = [sgn(t) + 1] /2

On trouve alors que :

$$TF[U(t)] = \frac{1}{j\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

<u>Convolution :</u>

On considèrera, dans ce qui suit, que tous les systèmes étudiés sont linéaires et invariants dans le temps (sauf si le contraire est signalé). On sait qu'un système est caractérisé par sa réponse impulsionnelle. Considérons le système suivant :



x(t) et y(t) étant respectivement l'entrée et la sortie du système et h(t) étant la réponse impulsionnelle.

On montre que connaissant l'entrée x(t) et la réponse impulsionnelle h(t) du système alors la convolution permet de calculer la réponse y(t).

On dira que y(t) est la convolution de y(t) et de h(t) et s'écrit par y(t) = x(t)*h(t)

Formellement on a :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

On montre que la convolution est :

1) commutative $x_1(t)* x_2(t) = x_2(t)* x_1(t)$
2) associative $[x_1(t)* x_2(t)]* x_3(t) = x_1(t)* [x_2(t)* x_3(t)]$
3) distributive $x_1(t)* [x_2(t) + x_3(t)] = [x_1(t)* x_2(t)]+ [x_1(t)* x_3(t)]$

<u>Fonction de corrélation</u>

La fonction de corrélation (ou intercorrélation) permet de comparer des signaux en fonction du retard entre les signaux. Elle permet aussi d'étudier la *ressemblance* de différents signaux dans le domaine temporel. En d'autres termes, la fonction d'intercorrélation traduit l'évolution de la similitude en fonction du paramètre de translation relative τ.

<u>Intercorrélation et corrélation de signaux à énergie finie :</u>

$$\dot{\varphi}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t).\,y(t+\tau)dt$$

$\dot{\varphi}_{xy}(\tau)$ est appelée fonction d'intercorrélation des signaux x(t) et y(t). La notation $\dot{\varphi}$ est utilisée pour distinguer :

$\dot{\varphi}$ → l'un au moins des signaux est à énergie finie

φ → les 2 signaux sont à puissance moyenne finie

On dira que les 2 signaux x(t) et y(t) sont orthogonaux (ou non corrélés) pour chaque valeur de τ où la fonction d'intercorrélation est nulle.

En vertu de la propriété de la symétrie hermitienne, nous avons :

$$\dot{\varphi}_{xy}(\tau) = \dot{\varphi}_{yx}(-\tau)$$

<u>Fonction d'autocorrélation</u>

Lorsque les deux signaux sont égaux x(t)=y(t) alors nous avons la fonction d'autocorrélation qui s'écrit comme suit :

$$\dot{\varphi}_{x}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t).\,x(t+\tau)dt$$

La symétrie hermitienne nous permet d'écrire :

$$\dot{\varphi}_{x}(\tau) = \dot{\varphi}_{x}(-\tau)$$

On déduit facilement que :

1) la partie réelle de la fonction d'autocorrélation est PAIRE
2) la partie imaginaire de la fonction d'autocorrélation est IMPAIRE

La valeur à l'origine (τ=0) de la fonction d'autocorrélation est égale à l'énergie du signal.

Sachant que :

$$\dot{\varphi}_{x}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t).\,x(t+\tau)dt$$

Nous avons alors :

$$\dot{\varphi}_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t).x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

<u>Intercorrélation et corrélation de signaux réels :</u>

Lorsque les deux signaux à traiter sont réels, nous avons les simplifications suivantes :

$$\dot{\varphi}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).y(t+\tau)dt$$

$$\dot{\varphi}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).y(t+\tau)dt$$

Par changement de variable nous avons aussi :

$$\dot{\varphi}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau).y(t)dt$$

$$\dot{\varphi}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau).x(t)dt$$

Les fonctions d’intercorrélation et d’autocorrélation de signaux réels sont aussi réelles.

Propriétés :

$$\dot{\varphi}_{xy}(\tau) = \dot{\varphi}_{yx}(-\tau)$$

$$\dot{\varphi}_x(\tau) = \dot{\varphi}_x(-\tau)$$