Chapitre 4

La Transformée en z

Introduction :

Dans le domaine analogique la transformée de Laplace peut être considérée comme la généralisation de la transformée de Fourier. D'une manière similaire, la transformée en z peut être considérée comme la généralisation de la transformée de Fourier pour les systèmes discrets.

Définition :

On note par X(z) la transformée en z de x(n) définie par :

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}$$

z étant en général une variable complexe. Dans la littérature on trouvera les notations suivantes :

$$TZ[x(n)] = X(z)$$

Ou bien

$$Z[x(n)] = X(z)$$

En coordonnées polaires nous avons :

$$z = r.e^{i\omega}$$

$$X\left(r.e^{i\omega}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n).r^{-n}.e^{i\omega n}$$

Remarques :

- Si r=1 la transformée en z est égale à la transformée de Fourier (TFTD)
- Comme pour la transformée de Fourier, la transformée en z ne converge pas toujours. On appellera par RC : *région de convergence* l'ensemble des valeurs de z pour lequel la TZ converge.
- Il est important de noter que la TZ peut converger alors que la TF ne converge pas.

En général les signaux convergeront dans une région sous forme d'anneau dans le plan Z.

$$R_- < |Z| < R_+$$

Une classe importante de transformées en z sont celles pour qui X(z) est une fonction rationnelle :

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

On appellera par *zéro*s les valeurs qui annulent N(z).
On appellera par *pôles* les valeurs qui annulent D(z)

Exemple :
On considère le signal x(n) défini par $x(n)=a^n.U(n)$. Sa TZ est calculée comme suit :

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a^n.U(n).z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a.z^{-1})^n$$

$$X(z) = \frac{1-(a.z^{-1})^{\infty+1}}{1-a.z^{-1}}$$

Si $|a.z^{-1}| < 1$ c'est-à-dire $|z| > |a|$
alors on :

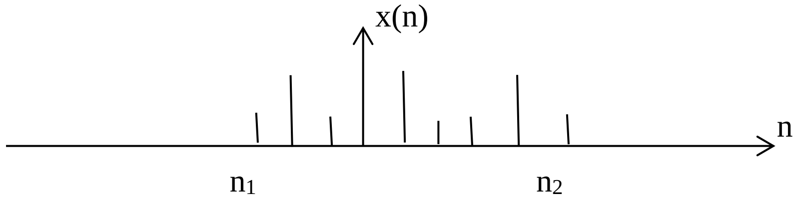
$$X(z) = \frac{1}{1-a.z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

La région de convergence ($|z| > |a|$) est l'extérieur d'un cercle de rayon a.
Dans ce qui suit nous allons montrer que les propriétés des signaux x(n) déterminent leur région de convergence, en d'autres termes :

$$\{\boldsymbol{Propriétés\ de\ x(n)}\} \leftrightarrow \{\boldsymbol{Propriétés\ de\ la\ région\ de\ convergence}\}$$

Afin de mettre en relief le lien existant entre la région de convergence de X(z) et les propriétés du signal x(n), il est intéressant d'étudier quelques cas spéciaux.

Signal de longueur finie (Finite length signal)



La transformée en z X(z) de x(n) se calcule comme suit :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{n=n_2} x(n).z^{-n}$$

On suppose que x(n) est borné c'est-à-dire que : $|x(n)| < \infty \quad \forall n$

Une simple étude donne les résultats du tableau suivant :

n_1	n_2	Région de convergence	Caractéristique
>0	>0	**Z** – { 0 }	causal
<0	>0	**Z** – { 0, ∞ }	non causal
<0	<0	**Z** – { ∞ }	anti causal

On en tire que d'une manière générale, un signal x(n) quelconque, de longueur finie, possède une région de convergence tout le plan complexe **Z** sauf sauf pour 0 ou/et ∞.

Signal unilatéral droit :

Un signal est unilatéral droit si n_1 est fini et $n_2 = \infty$.

- On démontre que ce type de signal a une région de convergence à l'extérieur d'un cercle.
- Si $n_1 \geq 0$ le signal est causal et X(z) converge pour $z=\infty$
- Si $n_1 < 0$ le signal est non causal et X(z) ne converge pas pour $z=\infty$

Conclusion : ***la région de convergence d'un signal unilatéral droit est à l'extérieur d'un cercle***. Si la région de convergence inclut $z=\infty$ alors le signal est causal autrement le signal est non causal.

Signal unilatéral gauche :

Un signal est unilatéral gauche si $n_{1=}$ - ∞ et n_2 = est fini.

On démontre que la région de convergence d'un signal unilatéral gauche est à l'intérieur d'un cercle.

Signal bilatéral (Two sided signal)

Un signal est bilatéral si $n_{1=} - \infty$ et $n_2 = \infty$.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} x(n).z^{-n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} x(n).z^{-n}$$

Ce signal est donc composé d'un signal unilatéral droit (la région de convergence est à l'intérieur d'un cercle de rayon R+) et d'un signal unilatéral gauche (la région de convergence est à l'extérieur d'un cercle de rayon R-). On montre alors que la région de convergence du signal bilatéral, si elle existe, est sous forme d'un anneau (si R+>R-).

Remarque : si R- < 1 < R+ alors la transformée de Fourier de ce signal existe.

Transformée en z inverse :

La transformée en z inverse TZI peut être obtenue grâce au théorème de l'intégrale de Cauchy qui affirme que :

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{k-1}.dz = \begin{cases} 1 & pour\ k = 0 \\ 0 & pour\ k \neq 0 \end{cases}$$

Où C est un contour fermé dans la région de convergence qui encercle l'origine.

Considérons :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}$$

En multipliant par z^{k-1} les deux termes de l'égalité et en intégrant le deuxième terme sur un contour fermé C renfermant l'origine dans la région de convergence, nous avons :

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z).z^{k-1}.dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}.z^{k-1}.dz$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n+k-1}.dz$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z).z^{k-1}.dz = x(k)$$

Ou d'une manière générale, on a :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z).z^{n-1}.dz$$

Remarques :

- Aucune limitation n'apparait dans le signe de n donc la formule est valable quel que soit n.
- La courbe fermée C est entièrement contenue dans la région de convergence de X(z) et contient l'origine.

Le théorème des résidus peut être aussi utilisé pour trouver l'inverse de transformée en z. On montre que :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z).z^{n-1}.dz = \sum(résidus\ de\ X(z).z^{n-1}\ aux\ pôles)$$

En général $X(z).z^{n-1}$ est une fonction rationnelle en z, comme suit :

$$X(z).z^{n-1} = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^s}$$

$X(z).z^{n-1}$ possède s pôles pour z=z_0 et $\varphi(z)$n'a aucun zéro pour z=z_0 alors :

$$Res\ [X(z).z^{n-1}\ \text{à}\ z = z_0\ ] = \frac{1}{(s-1)!}\left[\frac{d^{s-1}\varphi(z)}{d^{s-1}z}\right]_{z=z_0}$$

En particulier, s'il y a un pôle pour z=z_0 (s=1) alors on obtient :

$$Res\ [X(z).z^{n-1}\ \text{à}\ z = z_0\ ] = \varphi(z_0)$$

Il existe d'autres méthodes pour calculer la TZI, la méthode par division et la méthode par fraction partielle sont les plus connues.

Propriétés de la transformée en z :

Linéarité :

Considérons deux signaux x(n) et y(n) et leurs TZ :

TZ[x(n)]=X(z) avec comme région de convergence RC Rx- < |z| < Rx+

TZ[y(n)]=Y(z) avec comme région de convergence RC Ry- < |z| < Ry+

Alors :

TZ[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z) avec RC R- < |z| < R+

R- = max{Rx-, Ry-} et

R+ = min{Rx+, Ry+}

Si la combinaison linéaire est telle que les zéros introduits éliminent un ou plusieurs pôles alors la région de convergence sera plus grande.

Exemple : x(n)=a^n.U(n) et y(n)=a^n.U(n-1) alors x(n) – y(n)=δ(n) a comme région de convergence tout l'espace complexe Z.

Décalage :

TZ[x(n)]=X(z) avec comme région de convergence RC Rx- < |z| < Rx+

$$TZ[x(n+n_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+n_0)\, z^{-n}$$

Posons $m=n+n_0$ on a alors :

$$TZ[x(n+n_0)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, z^{-(m-n_0)} = z^{n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, z^{-(m-n_0)}$$

On en déduit que :

$\boldsymbol{TZ[x(n+n_0)] = z^{n_0} X(z)}$ avec **Rx- < |z| < Rx+**

La région de convergence est identique sauf parfois pour z=0 ou z=∞

Multiplication par un signal exponentiel :

TZ[x(n)]=X(z) avec comme région de convergence RC Rx- < |z| < Rx+

Alors, un simple calcul montre que :

$\boldsymbol{TZ[a^n.x(n)] = X(a^{-1}z)}$ avec **Rx- < |a^{-1}z| < Rx+** c'est à dire **|a|.Rx- < |z| < |a|.Rx+**

Dérivation :

Considérons :

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}$ avec Rx- < |z| < Rx+

Alors :

$$\frac{dX(z)}{dz} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n}z^{-1} \quad = -z.\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} \quad = TZ[nx(n)]$$

$$\boldsymbol{-z.\frac{dX(z)}{dz} = TZ[nx(n)]}$$

Théorème de la valeur initiale : (signal causal)

Si x(n)=0 pour n<0 alors $x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$

Convolution :

On démontre que :

$$\{w(n) = x(n) * y(n)\} \leftrightarrow \{W(z) = X(z).Y(z)\}$$

Théorème de la convolution complexe :

Il est important de noter que, contrairement au domaine analogique, la multiplication des signaux dans le temps n'entraine pas une convolution de leurs images dans le domaine fréquentiel

$$\{w(n) = x(n).y(n)\} \quad n'implique\ pas\ que \quad \{W(z) = X(z) * Y(z)\}$$

On parle alors de convolution complexe. On montre que W(z) est obtenue par l'expression suivante :

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X\left(\frac{z}{v}\right)Y(v)v^{-1}dv \qquad \text{(A)}$$

Ou

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)Y(\frac{z}{v})v^{-1}dv \qquad \text{(B)}$$

C est un contour fermé situé dans une région appartenant à l'intersection des régions de convergence de X et Y.

Forme polaire :

On considère un cercle comme contour d'intégration et posons :

$v=\rho.e^{j\theta}$ et $z = re^{j\phi}$

par substitution dans la dernière expression de W(z), on trouve :

$$W\left(\mathrm{r}e^{j\phi}\right) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{-\pi}^{\pi} Y\left(\frac{r}{\rho}e^{j(\phi-\theta)}v\right)X(\rho e^{j\theta})d\theta$$

Etude de la convergence de W(z) :

X(z) a comme région de convergence RC $\quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

Y(z) a comme région de convergence RC $\quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$

En considérant l'expression W(z) dans l'équation (A), on alors :

$$R_{x-} < |z/v| < R_{x+}$$

$$R_{y-} < |v| < R_{y+}$$

En combinant ces deux expressions on a :

$$R_{x-}.R_{y-} < |z| < R_{x+}.R_{y+}$$

Ce qui correspond à la région de convergence de W(z) qui peut être étendue lorsque X et Y ont des pôles et des zéros qui s'éliminent.

Quelques Propriétés de la Transformée en z :

Signal	**Transformée en z**	**RC : Région de convergence**
$x(n)$	$X(z)$	$Rx- < \|z\| < Rx+$
$y(n)$	$Y(z)$	$Ry- < \|z\| < Ry+$
$x(n+n_0)$	$z^{n0}.X(z)$	$Rx- < \|z\| < Rx+$
$a^n.x(n)$	$X(a^{-1}.z)$	$\|a\|.Rx- < \|z\| < \|a\|. Rx+$
$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$Rx- < \|z\| < Rx+$
$x(n)*y(n)$	$X(z).Y(z)$	$max[Rx-, Ry-] < \|z\| < min[Rx+, Ry+]$
$x(n).y(n)$	$W(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)Y(\frac{z}{v})v^{-1}dv$	$Rx- . Ry- < \|z\| < Rx+. Ry+$