Chapitre 5

Signaux et systèmes discrets

Equation aux différences :

Dans toute la suite de ce cours nous ne nous intéresserons qu'aux systèmes *linéaires* et *invariants*. L'équation aux différences joue un rôle important et caractérise les signaux et les systèmes discrets. Elle se présente comme suit :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \,.\, y(n-k) = \sum_{l=0}^{M} b_l \,.\, x(n-l)$$

Remarque : d'une manière générale, les systèmes générés par l'équation aux différences ne sont pas obligatoirement causaux, dans la suite de ce cours on les considérera causaux (sauf si on signale le contraire).

Sans perte de généralités, on pose $a_0 = 1$, on a alors :

$$y(n) = \sum_{l=0}^{M} b_l \,.\, x(n-l) - \sum_{k=1}^{N} a_k \,.\, y(n-k)$$

On remarque que la sortie y(n) dépend de la *sortie* et de l'*entrée*, on dira que nous sommes en présence d'un système à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) (en anglais Infinite Impulse Response : IIR).

Si $a_k = 0 \quad \forall k \in [1, N]$

Nous avons alors :

$$y(n) = \sum_{l=0}^{M} b_l \,.\, x(n-l)$$

Dans ce cas, la sortie ne dépend que de l'entrée, on dira que nous sommes en présence d'un système à Réponse Impulsionnelle Finie RIF (en anglais Finite Impulse Response : FIR)

Fonction de transfert d'un système RII :

Considérons l'équation aux différences :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \,.\, y(n-k) = \sum_{l=0}^{M} b_l \,.\, x(n-l)$$

Calculons la TZ des deux termes de l'égalité, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k . z^{-k} . Y(z) = \sum_{l=0}^{M} b_l . z^{-l} . X(z)$$

On montre que :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l . z^{-l}}{\sum_{k=0}^{N} a_k . z^{-k}} = \frac{\prod_{i=0}^{M}(z - z_{0i})}{\prod_{i=0}^{N}(z - z_{pi})}$$

On remarque que la sortie dépend de l'entrée et aussi de la sortie. H(z) est appelée fonction de transfert du système RII. On appellera par z_{pi} les pôles et z_{oi} les zéros de la fonction de transfert.

Remarque : la fonction de transfert d'un système RII est une fraction rationnelle en z.

Stabilité :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système discret soit stable est que tous ses pôles doivent être tous à l'intérieur du cercle unité :

$|z_{pi}| < 1 \quad \forall i \in [1, N]$

Fonction de transfert d'un système RIF :

Comme nous l'avons vu, le système est un système RIF (à réponse impulsionnelle finie) si :

$a_k = 0 \quad \forall k \in [1, N]$

La sortie est donc définie par :

$$y(n) = \sum_{l=0}^{M} b_l \,.\, x(n-l)$$

En utilisant la transformée en z, on trouve :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{l=0}^{M} b_l . z^{-l}$$

On en déduit que la fonction de transfert d'un système RIF est un polynôme en z. *Ce type de système est toujours stable.*

Représentation fréquentielle des systèmes discrets :

Une propriété fondamentale des systèmes linéaires et invariants est que la réponse à un signal sinusoïdal est aussi un signal sinusoïdal de même fréquence dont l'amplitude et la phase sont déterminées par le système.

Considérons un système défini par h(n) et attaqué par $x(n) = e^{-j\omega n}$.

La sortie y(n) de ce système est :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).e^{j\omega(n-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).e^{-j\omega k}.e^{j\omega n}$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).e^{-j\omega k}.x(n) = H\left(e^{j\omega}\right).x(n)$$

$$y(n) = H\left(e^{j\omega}\right).x(n)$$

Cette équation indique que la sortie y(n) est obtenue en multipliant l'entrée x(n) par $H\left(e^{j\omega}\right)$ définie par :

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).e^{-j\omega k}$$

$H\left(e^{j\omega}\right)$ est appelée réponse fréquentielle :

- Elle est généralement complexe
- Elle est périodique de 2π
- Elle est continue en fonction de ω

Interprétation physique de la réponse fréquentielle :

On considère un système défini par h(n) sa réponse impulsionnelle. Si on attaque ce système par x(n), sa sortie est y(n)=h(n)*x(n).

Dans le domaine fréquentiel, le système est défini par $H\left(e^{j\omega}\right)$ sa réponse fréquentielle, l'entrée est $X\left(e^{j\omega}\right)$ alors la sortie est $Y\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right).X\left(e^{j\omega}\right)$.

Posons $H\left(e^{j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|.e^{j\varphi_H(\omega)}$

Avec $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ amplitude fréquentielle du système

$\varphi_H(\omega)$ phase du système

On note :

$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}).X(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|.e^{j\varphi_H(\omega)}.|X(e^{j\omega})|.e^{j\varphi_X(\omega)}$

$Y(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|.|X(e^{j\omega})|.e^{j[\varphi_H(\omega)+\varphi_X(\omega)]}$

Nous remarquons que la sortie $Y(e^{j\omega})$ a une amplitude fréquentielle qui est le produit des amplitudes de $H(e^{j\omega})$ et $X(e^{j\omega})$. Sa phase est obtenue par la somme des phases