Chapitre 2

Echantillonnage

Introduction :

De nos jours le traitement des signaux se fait principalement sous forme numérique. Comparativement à l'analogique le numérique présente un grand nombre d'avantages tels que : la reproductibilité des systèmes, l'absence de dérive en temps ou en température, l'absence de réglages compliqués, la possibilité de traitements adaptatifs.

La conversion analogique-numérique nécessite trois opérations :

1) L'échantillonnage qui permet d'obtenir un signal discret
2) La quantification qui associe à chaque signal une valeur
3) Le codage qui associe un code à chaque valeur

Dans ce chapitre nous parlerons de l'étape d'échantillonnage.

I. Echantillonnage idéal :

L'échantillonnage consiste à prélever, à des instants précis (le plus souvent équidistants Te) les valeurs instantanées d'un signal analogique :

x (t) $\rightarrow x(nT_e)$ T_e : période d'échantillonnage

***Définition** :* un échantillonnage idéal x_e(t) d'un signal analogique x(t) est défini par :

$$x_e(\mathrm{t}) = x(t).\delta_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(t).\delta(t-nT_e)$$

$$x_e(\mathrm{t}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(nT_e).\delta(t-nT_e)$$

Etude fréquentielle :

TF[x(t)]=X(f)

TF[x_e(t)]=X_e(f)

TF[$\delta_{T_e}(t)$]=$\frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\delta(f-\frac{n}{T_e})$

$$X_e(f) = X(f) * TF[\delta_{T_e}(t)]$$

$$X_e(f) = X(f) * \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(f - \frac{n}{T_e})$$

On a donc :

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} X(f - nf_e)$$

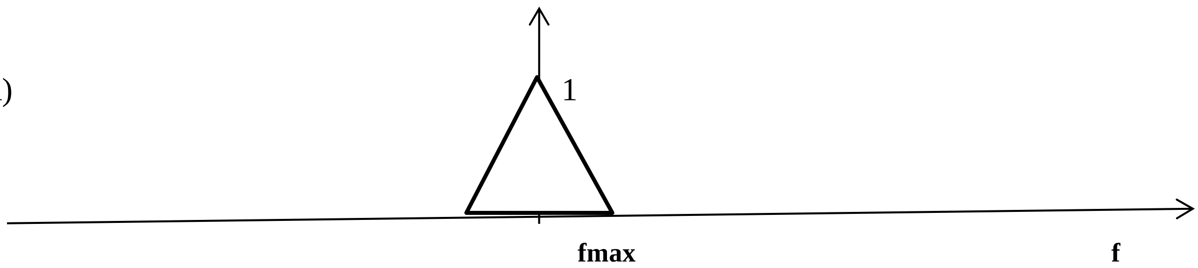
Il s’en suit que le spectre $X_e(f)$ du signal échantillonné est une réplique X(f) multipliée par 1/Te et « périodisée » avec fe.

Théorème :

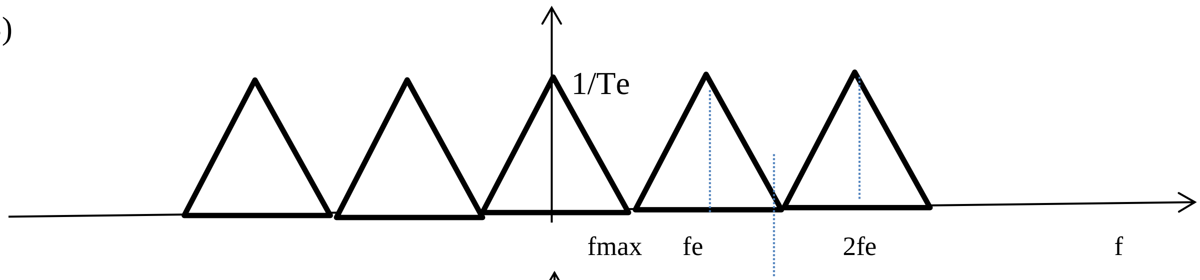
Soit x(t) un signal à bande limitée [-fmax, fmax], l’échantillonnage à fréquence f_e ne causera aucune perte d’information si seulement si $f_e \geq 2f_{max}$.

Etude d’un exemple

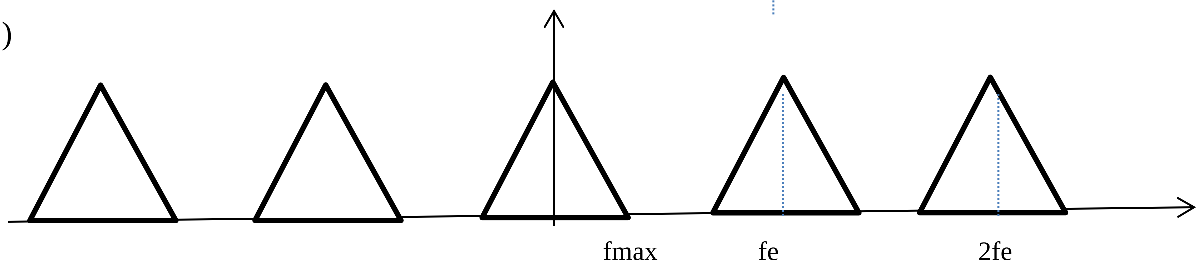
A)



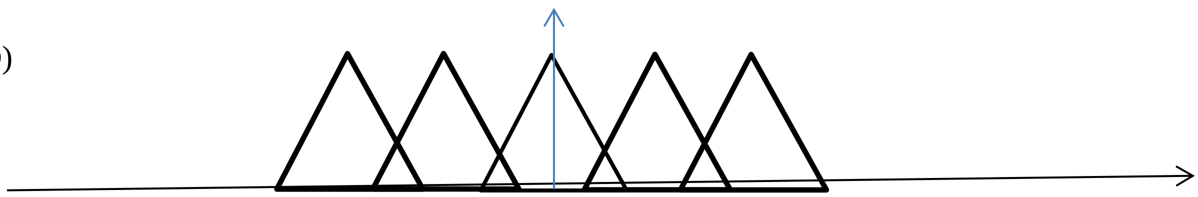
B)



C)



D)



Reconstruction de x(t) à partir de x(nTe)

On montre que l'on peut reconstruire x(t) à partir du signal échantillonné $x(n)=x(nT_e)$. On suppose que x(t) est à bande limitée et que fe ≥ 2 f_{max}.

$$x(t) = \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{i2\pi f}\right).e^{i2\pi ft}.df$$

$$X\left(e^{i2\pi f}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n).e^{-i2\pi fn}$$

On en tire :

$$x(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} x(n).e^{-i2\pi fn}.e^{i2\pi ft}.df$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2\pi f(t-n)}.df$$

On trouve :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).\frac{\sin{(t-n)\pi}}{(t-n)\pi}$$

Cette expression montre que l'on peut retrouver le signal analogique de départ x(t) à partir du signal échantillonné $x(n)=x(nT_e)$.

CHAPITRE 3

TRANSFORMEE DE FOURIER A TEMPS DISCRET TFTD

Définition : on considère un signal discret x(n) alors la TFTD est définie comme suit :
X(f) = TFTD[x(n)] = $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-i2\pi nf}$

Périodicité de la TFTD :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-i2\pi nf}$$

$$X(f+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-i2\pi n(f+1)}$$

$$X(f+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-i2\pi nf}.e^{-i2\pi n}$$

$$X(f+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-i2\pi nf}$$

En d'autres termes nous avons : $X(f) = X(f+1)$
On déduit que la TFTD est périodique de période 1.
Remarques :

1) $X(f)$ est une fonction continue en f
2) Si x(n) est réel alors $|X(f)|$ est paire et la phase φ(f) est impaire

TFTD inverse ou TFTDI :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-i2\pi nf}$$

$$x(n) = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f).e^{i2\pi nf}df$$

• Linéarité	ax(n)+by(n)	↔	aX(f) + bY(f)
• Décalage	x(n – no)	↔	$X(f)e^{-j2\pi fno}$
• Décalage fréquentiel	$x(n).e^{j2\pi fon}$	↔	X(f – fo)
• Dérivée	x'(n)	↔	j2πfX(f)